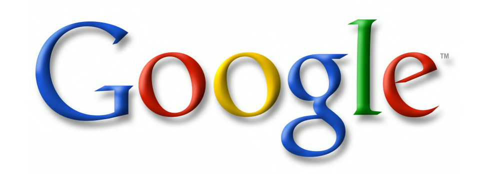
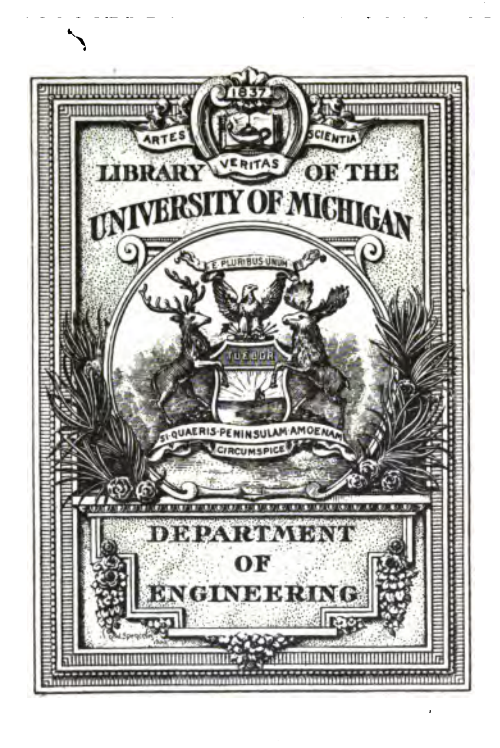



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

HYDROMECHANIK

VON

DR. M. RÜHLMANN,

Professor an der polytechnischen Schule zu Hannover; Ritter des Königl. hannoverschen Guelphen-Ordens 3. Classe; Ehrenbürger der Stadt Hannover; Ehrenmitglied des sächsischen Ingenieur-Vereins, des polytechnischen Vereins für das Königreich Bayern, des Handwerker-Vereins zu Chemnitz und des Local-Gewerbevereins zu Hannover; correspondirendes Mitglied des niederösterreichischen Gewerbe-Vereins zu Wien; Mitglied der Königl. Landwirthschafts-Gesellschaft zu Celle; Ehrenmitglied der landwirthschaftlichen Vereine zu Hannover, Hameln und Hildesheim.

„Les formules ne sont que des outils que doit diriger l'intelligence et qui ne peuvent jamais la remplacer".

Dupuit.

3 hft.

Mit 218 in den Text gedruckten Holzschnitten.

LEIPZIG.

ARNOLD'ISCHE BUCHHANDLUNG.

1857.

Schrift und Druck von Fr. Culemann in Hannover.

Vorwort.

Bei der Bearbeitung gegenwärtigen Buches habe ich besonders die praktische Bestimmung der Zöglinge der polytechnischen Schule zu Hannover, sodann aber den ausführenden Ingenieur vor Augen gehabt und daher analytische Formen wie naturphilosophische Auseinandersetzungen höchstens nur für den Zweck wissenschaftlicher Begründungen und des Verständnisses beachtet.

Die Einwebung des geschichtlichen Elementes an entsprechenden Stellen schien mir, nach meinen Erfahrungen im Vortrage, eben so nützlich wie interessant. Wo es nur immer möglich war bin ich in der Behandlungsweise des Stoffes den ausgezeichneten Meistern der Vergangenheit und Gegenwart gefolgt, wobei ich von den Neueren vor Allem Weisbach zu erwähnen habe, von dessen hydraulischen Arbeiten, außer den an betreffenden Stellen notirten, mir besonders die werthvollen Artikel der Maschinenencyklopädie „Ausfluß“ und „Bewegung des Wassers“ von großem Nutzen waren. Nächstdem habe ich besonders der Werke und den Versuchen Dubuat's, vorzüglich Poncelet's, sodann Bidone's, Navier's, d'Aubuisson's und Redtenbacher's zu gedenken, so wie endlich der allerjüngsten Arbeiten von Lebros und Dupuit.

Die von letzterem Hydrauliker zuerst gelieferten Tabellen zur praktischen Ermittelung von Stauhöhen und Stauweiten, habe ich frisch berechnen lassen und wesentlich erweitert. Hierbei erfülle ich zugleich eine angenehme Pflicht, wenn ich meinen

verehrten Schülern, Herrn Lichtenberg, Gödecker und Weichelt, für ihre eben so mühevolle wie zeitraubende Arbeit beim Berechnen der Stautabellen, meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Nicht minder gebührt der Verlagshandlung mein Dank für die schöne Ausstattung des Werkes, so wie der Druck-Officin für die treffliche Ausführung.

Möge das Ganze keinen ungerechten Tadel erfahren!

Hannover, im Juni 1857.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Hydromechanik.

II. Heft.

Dritte Abtheilung.

Hydrodynamik.

Erster Abschnitt.

Ausfluss des Wassers aus Gefässmündungen.

Zweiter Abschnitt. III. Heft

Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen.

Dritter Abschnitt.

Bewegung des Wassers in Röhren und Röhrenleitungen.

Anhang.

Verbesserungen.

Seite 11 Zeile 17 von unten „nur" zu streichen.
„ 21 „ 6 von oben ist B statt N zu setzen.
„ 56 „ 3 unten, ist zu setzen: der Auftrieb $B = 26\frac{3}{4}$ 𝔘, so wie nach dem Streichen der folgenden Rechnungen:

$$v = \frac{40}{\gamma} = \frac{40}{53,2} = 0,751.$$

„ 112 „ 23 von oben ist t mit t_1 zu vertauschen.
„ 134 „ 24 von oben ist der Buchstabe q mit p zu verwechseln.
„ 139 „ 14 von oben ist I. vor Z zu setzen.
„ 157 „ 26 von oben ist 69 statt 68 zu schreiben.
„ 164 „ 10 von unten lese man: Torino Tomo LX. §. 16.
„ 173 „ 12 von unten ist „vorn" zu streichen und mbn zu setzen.
„ 173 „ 27 u. 28 von unten ist C zu streichen.
„ 178 „ 11 von oben ersetze man 52 Sec. durch 1 Minute 52 Sec.
„ 224 „ 16 von oben fehlt zwischen $\frac{\mu_n}{p}$ und μ das Gleichheitszeichen.
„ 250 „ 7 von oben ist Ueberfall statt Ueberfell zu setzen.
„ 251 „ 2 von unten muss es Cubikfuss statt Cubikmeter heissen.
„ 252 „ 16 von oben ist Seite 248 statt Seite 250 zu schreiben.
„ 276 „ 17 von oben ist „als" statt also zu lesen.
„ 296 „ 8 von unten ist $\frac{\gamma}{g}$ statt $\frac{g}{\gamma}$ zu setzen.
„ 308 „ 8 von unten ist in Gleichung I. x^2 statt x zu schreiben.
„ 325 „ 7 von unten ist am Ende der Zeile einzuschalten: sodann I.:
„ 396 „ 11 von unten ist $\frac{v^2}{2g}$ statt $\frac{v^2}{g}$ zu setzen.
„ 413 „ 13 von unten muss „Zweites Kapitel" über §. 156 geschrieben werden.
„ 418 „ 12 von unten und ferner ist bei der Berechnung von d überall die 5te Wurzel statt der Quadrat-Wurzel zu setzen.
„ 434 „ 4 von unten muss es 186 statt 183 heissen.
„ 437 „ 14 von unten ist §. 162 einzuschalten.
„ 446 „ 11 von unten ist $V - v$ und V durch $V \pm v$ zu ersetzen.
„ 474 „ 5 von oben ist Gesammtdruck statt Gesammtausdruck zu schreiben.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Einleitung und Erklärungen.

§. 111.

Alles auf unserer Erde fließende Wasser, dessen Oberfläche sich in unmittelbarer Berührung mit der atmosphärischen Luft befindet, bewegt sich entweder in selbst geschaffenen Vertiefungen, Rinnen, Betten etc., und bildet je nach der Größe oder Bedeutsamkeit, Ströme, Flüsse oder Bäche, oder die Bewegung erfolgt in von den Menschen geschaffenen Behältern, welche man, je nach Zweck oder Ausdehnung, mit den Namen Canäle, Gräben oder Gerinne belegt.

Bei dem gegenwärtigen Zustande der wissenschaftlichen Hydraulik ist man allein im Stande, Theorien für die Bewegung des Wassers in Behältern mit regelmäßigen Längen- und Quer-Profilen, d. h. in Canälen, aufzustellen und dieses wiederum gestützt auf Beobachtungen, Versuche und Erfahrungen.

Im Nachstehenden wird daher immer vorausgesetzt, daß die Wände und Böden der Behälter, in welchen das Wasser fließt, frei von derartigen Erhöhungen und Vertiefungen sind, wodurch plötzliche Geschwindigkeitsänderungen, Wirbel, Gegenströme u. dgl. erzeugt werden.

Anmerkung. In Ermangelung aller sonstigen Anhaltepunkte pflegt man auch von solchen Theorieen Anwendungen auf die Bewegung des Wassers in Flüssen überhaupt zu machen, die selbstredend nicht mehr Ansprüche auf Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit machen können, als deren Character den obigen Voraussetzungen entspricht.

§. 112.

Stellt Fig. 130 das Längenprofil eines Canales (Flusses) in der Stromrichtung genommen dar, so wird die Niveaudifferenz



Fig. 130.

EC zweier Punkte *A* und *C* der Wasseroberfläche, die durch eine Gerade *AC* von bestimmter Länge verbunden sind, das Gefälle, bezogen auf die bezeichnete Strecke, genannt. Das Gefälle pr. Längeneinheit heisst relatives Gefälle, Abhang oder Rösche.

In der Folge werden wir das Gefälle *EC* stets durch h, die zugehörige Länge *AC* mit l, also den Abhang durch $\frac{h}{l}$ ausdrücken, zuweilen aber auch $\frac{h}{l} = \sin \varphi$ setzen, wobei φ den Winkel *CAE* bezeichnet, welchen die Oberfläche mit dem Horizonte *AE* bildet.

Schneidet man den im Canale (Flusse) fließenden Wasserkörper durch eine auf seine Bewegungsrichtung normale Ebene, so wird die dadurch entstehende Fläche *FGHJ*, Fig. 131, oder Fig. 132, das Querprofil, der Querschnitt des Wasserkörpers genannt, dessen Inhalt in der Folge stets mit a bezeichnet werden soll.



Fig. 131.

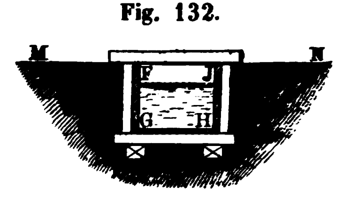


Fig. 132.

Derjenige Theil vom Umfange des Canalprofiles (Flussprofiles), welcher sich in unmittelbarer Berührung mit dem Wasser befindet, wird der benetzte Umfang oder der Wasserperimeter genannt, in unseren Figuren also $FG + GH + HJ$. Wir werden die Größe desselben stets durch p bezeichnen.

Anmerkung. Bewässerungscanälen giebt man nach Nadault de Buffon *) ein relatives Gefälle von $\frac{1}{3600}$ bis $\frac{1}{1666}$ oder beziehungsweise ein absolutes Gefälle von $0^m,277$ bis $0^m,060$ pr. Kilometer. Canäle, die zur Bewässerung und Schifffahrt zu-

*) Traité des Irrigations, Tome II, p. 213.

gleich dienen, ein relatives Gefälle von $\frac{1}{6666}$ bis $\frac{1}{3333}$ oder ein absolutes Gefälle von beziehungsweise 0,15 bis 0^m,30 pr. Kilometer.

Canäle, die zur Schifffahrt allein bestimmt sind, erhalten entweder gar kein Gefälle, oder ein sehr geringes. So z. B. hat der Exilcanal (Buffalo-Albany) bei 371 engl. Meilen (à 5280′) Länge ein Gefälle von 689 Fuß (im Hauptcanale), was eine Rösche $\frac{h}{l} = 0,000398$ giebt; der Canal de l'Ourcq bei 96,000 Meter Länge, ein absolutes Gefälle von 10^m,14 oder einen Abhang $\frac{h}{l} = 0,0001056$.

Bei der Croydon-Wasserleitung (New York) nahm man $\frac{h}{l} = 0,0002174$, bei der New-River-Wasserleitung (London) $\frac{h}{l} = 0,00004735$ etc.

Für Aufschlagswassergräben oder Gerinnen giebt man dem Zuführcanale: $\frac{h}{l} = \frac{1}{2000}$ bis $\frac{1}{2500}$, dem Abführcanale: $\frac{h}{l} = \frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{1000}$.*) Nach Weisbach (Ing. Mechanik Bd. 2) giebt man den Aufschlaggräben der Freiberger Betriebswässer $\frac{h}{l} = 0,00025$ bis $0,0005$, den Abzugsgräben $\frac{h}{l} = 0,001$ bis $0,002$.

Ströme und Flüsse haben nahe ihrem Ursprunge ein grösseres Gefälle wie unweit der Mündung in's Meer. So hat die Elbe auf der Strecke von Podiebrad bis Leitmeritz auf die Meile durchschnittlich ein Gefälle (nach Stranz**) von 9 Fuß, d. i. $\frac{h}{l} = \frac{1}{2822} = 0,00035$. Hübbe***) fand dagegen das Gefälle des Elbspiegels, auf der Strecke von Neßhaken bis Schulau (unterhalb Hamburg) auf 30000 Fuß Stromlänge: in der Mitte der Fluthzeit circa 14 Zoll oder $\frac{h}{l} = \frac{1}{26000} = 0,00038$; in der Mitte der Ebbezeit circa 12 Zoll, oder $\frac{h}{l} = \frac{1}{30000} = 0,000033$. Der Rhein von Constanz bis Straßburg hat: $\frac{h}{l} = 0,001140$ und von Straßburg bis Rotterdam: $\frac{h}{l} = 0,000450$. Die Donau von

*) Eine fernere Regel ist die, im Zuleitungscanale dem Wasser eine mittlere Geschwindigkeit von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß pr. Secunde und im Abführcanale eine mittlere Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Fuß bis 3 Fuß zu gestatten, das Gefälle aber nach den folgenden Paragraphen zu berechnen.

**) Vergleichende hydrographische Tabellen. Breslau 1836. S. 30.

***) Das Fahrwasser der Unterelbe. Hamburg 1854. Seite 66.

Donaueschingen bis Wien: $\frac{h}{l} = 0{,}000490$, und von Wien bis zum Meere: $\frac{h}{l} = 0{,}000090$. *)

Die stärksten für Schiffe eben noch passirbar relativen Gefälle in Strömen (Stromschnellen), sind nach Hagen $\frac{1}{600}$ bis $\frac{1}{500}$ a. a. O. Theil II. Bd. 1. S. 472.

§. 113.

Geschwindigkeiten eines Stromprofiles.

Was aufmerksame Betrachtungen der Umstände erwarten lassen, bestätigt die Erfahrung, daß nämlich die Geschwindigkeiten, womit das Wasser die verschiedenen Punkte eines Profiles durchströmt, verschieden sind, je nachdem sich die betreffende Stelle an der Oberfläche des Wassers, unter demselben, am Boden, den Wänden oder irgend wo in der Masse befindet.

Die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten in einem und demselben Profile hängt besonders von den Widerständen ab, welche die Wasserfäden an den Wänden, am Boden und an der Oberfläche, so wie unter sich selbst erfahren, nicht aber von der Tiefe des betreffenden Punktes unter dem Wasserspiegel, wie dies beim Ausflusse des Wassers aus Seitenöffnungen der Gefäße der Fall war. Die Ursache der letzteren Erscheinung erklärt sich ohne Weiteres aus §. 95, indem die umgebenden Wassertheilchen den Druck der höher liegenden aufheben, in jedem Profilpunkte gleichsam ein Ausfluß durch eine unter Wasser gesetzte Mündung stattfindet.

Diejenige Stelle der fließenden Wassermasse im Flußbette oder im Canale, woselbst die größte Geschwindigkeit stattfindet, wird der Stromstrich genannt, und fällt in der Regel mit der größten Tiefe der betreffenden Querprofile zusammen. **)

Anmerkung 1. Um zur Beurtheilung der verschiedenen Geschwindigkeiten in einem und demselben Stromprofile Gelegenheit

*) Angaben für noch andere Flüsse finden sich u. A. Annales des Ponts et Chaussées. 1843, 3. p. 254. Für den Rhein bei Hagen, Theil II. Bd. II. Seite 329.

**) Dabei sind die Bahnen der Wassertheilchen nicht immer den Wänden der Betten parallel, oder aequadistant, sondern von den Ufern aus gegen die Mitte hin etwas gekrümmt, wodurch, vermöge der damit auftretenden Centrifugalkraft, ein stärkerer hydraulischer Druck gegen den Stromstrich und eine gewisse Hebung des Spiegels daselbst erfolgt. Man sehe hierüber Scheffler „Principien der Hydraulik etc.“ Bd. 2. S. 57. Ferner Funk „Die wichtigsten Lehren der Hydrotechnik“. §. 52 und §. 39.

zu geben, theilen wir nachfolgende Tafel aus dem Resultate der Geschwindigkeitsmessungen des holländischen Hydraulikers Brünings im Niederrheine (oberhalb der Scheidung des Ysselstromes) mit, wobei bemerkt werden mag, daß die Breite von 48 Ruthen = 576 Fuß des betreffenden Querprofiles in 8 gleich große Theile getheilt, und in jedem Theilpunkte eine Perpendikulare genommen wurde, so daß die Zahl der Perpendikularen 7 betrug, in denen er die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen bestimmte. Alle Maße sind Rheinländische.*)

Tiefe unter der Oberfläche	1. Perpendikulare	2. Perpendikulare	3. Perpendikulare	4. Perpendikulare	5. Perpendikulare	6. Perpendikulare	7. Perpendikulare
6 Zoll	32,02 Z.	35,28 Z.	39,21 Z.	42,78 Z.	43,63 Z.	39,21 Z.	41,92 Z.
1 Fuß	30,85	35,28	38,27	43,63	42,78	43,63	42,78
2 "	30,85	35,28	37,30	41,04	41,04	41,92	41,92
3 "	32,02	34,23	37,30	40,13	41,92	41,92	41,04
4 "	29,64	33,14	37,30	40,13	41,44	42,79	41,04
5 "	28,88	32,02	36,30	38,27	39,21	42,78	39,21
6 "	28,88	29,64	35,28	37,30	38,27	41,04	37,3
7 "	27,06	27,06	34,23	36,30	37,30	37,30	36,30
8 "	25,67	27,06	32,02	33,14	35,28	36,30	36,40
9 "	24,21		27,06	30,85	34,23	33,14	29,64
10 "					32,02		
Mittelwerthe **)	28,224	32,166	35,389	37,749	39,497	39,602	38,389
Ganze Tiefe der Perpendikulare	11 Fuß	8½ Fuß	9½ Fuß	10 Fuß	10½ Fuß	11 Fuß	11 Fuß

Die Abnahme der Geschwindigkeiten, von der Oberfläche nach dem Boden hin, ist dabei unverkennbar. Die Nichtstetigkeit dieser Abnahme dürfte vorzugsweise ihren Grund darin haben, daß die bei größeren Flüssen vorkommenden Wirbel und Gegenströme hier von Einfluß waren.***) Die Geschwindigkeiten unmittelbar an der Oberfläche und am Boden fehlen (wozu das von Brünings angewandte, und in §. 115 (Anmerkung) beschriebene Geschwindigkeitsmeßinstrument nicht eingerichtet war), jedoch ist anzunehmen, daß beide be-

*) Woltmann: Beiträge zur hydraulischen Architectur. Bd. 3. Seite 359.
Wiebeking: Theoretisch-praktische Wasserbaukunst. Bd. 1. Seite 53.

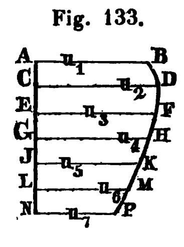
**) Brünings hat die Geschwindigkeiten in 20 verschiedenen Abständen derselben Perpendikulare gemessen, worauf sich die Mittelwerthe der vorletzten Horizontalreihe beziehen. Hier sind die Woltmann'schen Zahlenwerthe aufgenommen, und die Horizontalreihe für 6 Zoll Tiefe hinzugefügt.

***) Ganz allgemein ist dies Gesetz der Abnahme nicht, so scheint es sich z. B. bei Stromverengungen umzukehren, wie schon Mariotte beobachtet hatte und Hagen bestätigt. Man sehe dessen Wasserbaukunst. Theil II. Bd. 1. S. 283.

ziehungsweise kleiner gewesen sind, als die Werthe der Horizontalreihen für 6 Zoll und 9 Fuß Tiefe. Hiernach würde ferner zu schließen sein, daß die größte Geschwindigkeit etwa 6 Zoll bis 1 Fuß unter der Oberfläche stattfand. Alle diese Schlüsse lassen sich von den sonst in den verschiedenen Rheinarmen (Waal, Yssel etc.) von Brünings angestellten Messungen (man sehe die unten angegebenen Quellen) in gleicher Weise bilden.

Anmerkung 2. Die mittlere Geschwindigkeit $= U$ in einer und derselben Perpendikulare, ist streng genommen auf folgende Weise zu bestimmen.

Fig. 133.



Es sei $\overline{AN}$ die Perpendikulare, in der man in gleichen Abständen $AC = CE \ldots . = LN$ die Geschwindigkeiten $u_1, u_2, u_3 \ldots . u_7$ gemessen und als Ordinaten einer Curve BP aufgetragen hat, deren Fläche $ABPN$ man die Geschwindigkeitsscala zu nennen pflegt. Der Inhalt der letzteren Fläche ist offenbar die Summe aller Geschwindigkeiten der ganzen Perpendikulare, aus der man U erhält, wenn man diese Summe durch die Länge $\overline{AN}$ der Perpendikulare dividirt. Demnach ist:

$$U = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}\,[(AB + CD) + (CD + EF) \ldots . . (LM + NP)]}{AN}, \text{ oder}$$

$$U = \frac{AC}{AN}\left(\tfrac{1}{2}u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \tfrac{1}{2}u_7\right).$$

§. 114.

Wassermenge. — Mittlere Geschwindigkeit.

Die Wassermenge $= Q$, welche pr. Secunde durch ein bestimmtes Fluß- oder Canalprofil fließt, erhält man unter Voraussetzung, daß der Beharrungszustand der Bewegung (§. 67) bereits eingetreten ist, unmittelbar nach §. 71 oder §. 86, wenn man den Querschnitt ω eines jeden das Profil durchströmenden Wasserfadens, mit der ihm entsprechenden Geschwindigkeit $= u$ multiplicirt und die Producte addirt. Es ergiebt sich folglich die Gleichung:

$$(1) \quad Q = \Sigma(\omega u).$$

Dividirt man Q durch den Flächeninhalt a des Profiles, wobei $a = \Sigma\omega$ ist, so wird der Quotient die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Profiles genannt, die zwar nur eingebildet, zu betreffenden Verständnissen für die ganze Hydraulik aber von der größten Wichtigkeit ist. Wir bezeichnen die mittlere Profilgeschwindigkeit in der Folge stets mit v, erhalten also

$$(2) \quad v = \frac{Q}{a}, \text{ so wie}$$

$$(3) \quad Q = av$$

$$\text{und auch:} \quad (4) \quad v = \frac{\Sigma(\omega u)}{a}.$$

Aus (4) erhellt zugleich, wie man durch entsprechende Messungen die mittlere Profilgeschwindigkeit zu bestimmen im Stande ist.

Statt, wie es in (4) verlangt wird, das durch Breiten- und Tiefen-Messungen ermittelte Stromprofil in entsprechend kleine Flächenstücke ω zu theilen, und für die Mitte eines jeden derselben eine Messung der Geschwindigkeit $= u$ des durchfließenden Wasserfadens vorzunehmen, schlägt man gewöhnlich nachbemerkte Wege ein.

1. Man theilt die aufgenommene Profilfläche durch Perpendikularen in Abschnitte, bestimmt die mittlere Geschwindigkeit in jeder dieser Perpendicularen, berechnet den Flächeninhalt des einer jeden Perpendikularen zugehörigen Theiles, multiplicirt beziehungsweise diese Werthe mit einander, und dividirt die Summe derselben durch den Flächeninhalt des ganzen Profiles, der Quotient wird dann als mittlere Geschwindigkeit des letzteren betrachtet.

Aus geeigneten Messungen (die Geschwindigkeiten durch schwimmende, unten mit Eisen beschlagene Stäbe bis auf 20 Fuß Tiefe ermittelt) stellte Wiebekind a. a. O. Seite 40, bei einem Rheinprofile von 920 Fuß Breite (unweit Erfelden im Großherzogthum Hessen) nachstehende Tabelle zusammen:

Perpendikularen	Flächeninhalt des einer jeden Perpendikulare zugehörigen Theiles	Mittlere Geschwindigkeit der Perpendikulare	Wassermenge, welche durch den Profiltheil fließt
I.	1691 □Fuß	3,527 Fuß	5866 Cub.-Fuß
II.	1936	4,454	8623
III.	1843	4,211	7760
IV.	2006	3,944	7912
V.	2111	3,823	8068
VI.	2146	3,712	7966
VII.	1971	3,693	7279
VIII.	1732	3,441	5960
IX.	1668	3,398	5668
X.	1557	2,981	4641
XI.	1026	2,949	3026
XII.	1330	2,632	3500
Summen . .	21017	42,765	76269

Hiernach ist:

$$Q = \Sigma(\omega u) = 76269 \text{ Cubikfuß}^{*)}$$
$$a = 21017 \text{ Quadratfuß und somit}$$
$$v = \tfrac{76269}{21017} = 3{,}520 \text{ Fuß},$$

die mittlere Tiefe $= t$ des ganzen Profiles ist überdies:

$$t = \tfrac{21017}{920} = 22{,}83 \text{ Fuß}.$$

Diese Methode ist unter andern auch von Lahmeyer bei seinen vielfachen Versuchen in Anwendung gebracht worden. Man sehe deshalb S. 56 seines Werkchens: „Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Canälen." Braunschweig 1845.

2. Ein anderes Verfahren (gewöhnlich das Brüning'sche genannt) besteht darin, die mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Perpendikularen zu addiren, die Summe durch die Anzahl der Perpendikularen zu dividiren, und den Quotienten als die mittlere Geschwindigkeit der ganzen Profilfläche zu betrachten. Wendet man dies Verfahren auf das Beispiel der Brüning'schen Messungen an einem Rheinarme, Anmerkung 1, §. 113 an, so erhält man zuvörderst also Summe sämmtlicher 7 Perpendikulargeschwindigkeiten: 251,214, und die mittlere Geschwindigkeit: $v = \dfrac{251{,}214}{7} = 35{,}887$ Zoll $= 2{,}99$ Fuß.

Da nun der Inhalt des dort gemessenen Profiles 5752,5 □Fuß betrug, so ergiebt sich

$$Q = av = 5752{,}5 \times 2{,}99 = 17199{,}97 \text{ Cubikfuß}$$

für die zur Zeit der Messung durch das Profil fließende Wassermenge.

Die Wassermenge des ganzen Rheinstromes nach der Wiebeking'schen Messung (1.) berechnet sich auf diese Weise folgendermaßen:

Es ist die Summe der sämmtlichen 12 Perpendikulargeschwindigkeiten $= 42{,}765$, daher deren mittlere Geschwindigkeit $= \dfrac{42{,}765}{12}$ $= 3{,}563$. Diese als mittlere Geschwindigkeit $= v$ des ganzen Profiles betrachtet, findet sich endlich die Wassermenge

$$Q = av = 21017 \times 3{,}563 = 74883 \text{ Cubikfuß}.$$

3. Ich habe folgende Methode im Frühsommer 1852 zur Bestimmung der Wassermenge des Leineflusses unweit Hannover (zwischen

---

*) Nach einer Angabe in den Annales des Ponts et Chaussées 1846. Bd. 3, p. 212, beträgt die normale Wassermenge des Rheines = 2000 Cubikmeter = 64792 Cubikfuß rheinl. Vergleichsweise werde auf die Wassermenge der Elbe im ungetheilten Strome oberhalb Hamburg und Harburg aufmerksam gemacht. Nach Hübbe („Erfahrungen und Beobachtungen im Gebiete der Strombaukunst." Erster Theil, Seite 77) ist daselbst bei 800 Fuß Breite die Profilgröße = 12224 Quadratfuß. Die mittlere Geschwindigkeit = 2,16 Fuß, und sonach die pr. Sec. abfließende Wassermenge 26404 Cubikfuß.

Döhren und dem sogenannten schnellen Graben) benutzt. Die Geschwindigkeiten wurden in 5 gleich weit, in der ganzen Flußbreite von 101 Fuß, von einander abstehenden Perpendikularen beziehungsweise gemessen und die mittlere Perpendikulargeschwindigkeiten gefunden zu: 1,4319 Fuß; 1,3279 Fuß; 1,2761 Fuß; 1,36278 Fuß und 0,8418 Fuß, so daß sich für die mittlere Profilgeschwindigkeit setzen ließ $v = \frac{6,240}{5} = 1,248$ Fuß.

Mit Hülfe der Simpson'schen Regel wurde aus den betreffenden Tiefenmessungen der Flächeninhalt des Profiles zu 916,5 Quadratfuß, und die per Secunde abfließende Wassermenge berechnet zu:

$$Q = av = 916,5 \times 1,248 = 1143,79 \text{ Cubikfuß.}$$

Das Maß der Genauigkeit der besprochenen Methoden dürfte in der Weise als abnehmend zu bezeichnen sein, wie sie hier aufgezählt wurden.

Anmerkung. Woltmann a. a. O. S. 362 und Funk a. a. O. S. 24 leiten beide aus den sämmtlichen Brüning'schen Messungen Resultate ab, von denen hier als besonders wichtig aufgeführt werden mögen:

1. Die mittlere Geschwindigkeit einer jeden Perpendikuläre liegt nahe genug in der Mitte zwischen der größten und kleinsten.

2. Zwei richtige Beobachtungen einer Perpendikulären können allenfalls genügen, die mittlere Geschwindigkeit derselben zu bestimmen. (Die vielen von Brünings beobachteten Geschwindigkeiten sollten wahrscheinlich zur Ermittelung der Stromscala dienen.)

§. 115.

Geschwindigkeitsmessungen.

Das fast unter allen Umständen geeignetste Instrument zum Messen der Geschwindigkeit fließender Wässer in ganz beliebigen Stellen des Profiles (mit alleiniger Ausnahme der unmittelbaren Oberfläche und des Bodens), ist der von Woltmann angegebene hydrometrische Flügel *), Fig. 134 und Fig. 135, (in halber natürlicher Größe) dargestellt.

*) Woltmann: „Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels.“ Hamburg 1790.

Unsere Abbildung ist nach einem der hydrometrischen Flügel der polytechn. Schule in Hannover genommen, der von Herrn Universitätsmechaniker Inspector Meierstein in Göttingen gefertigt, und mit den Verbesserungen von Lahmeyer, Repsold und Anderen ausgerüstet ist.

Fig. 134.

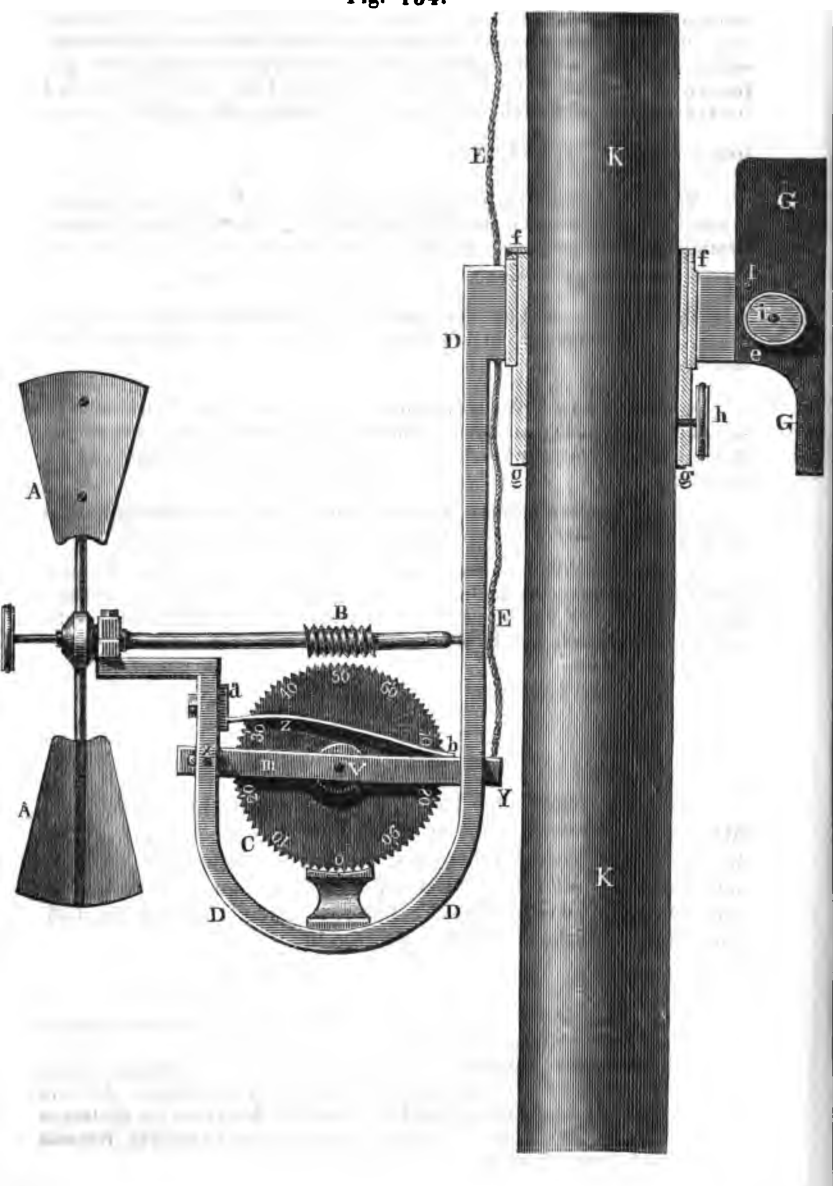
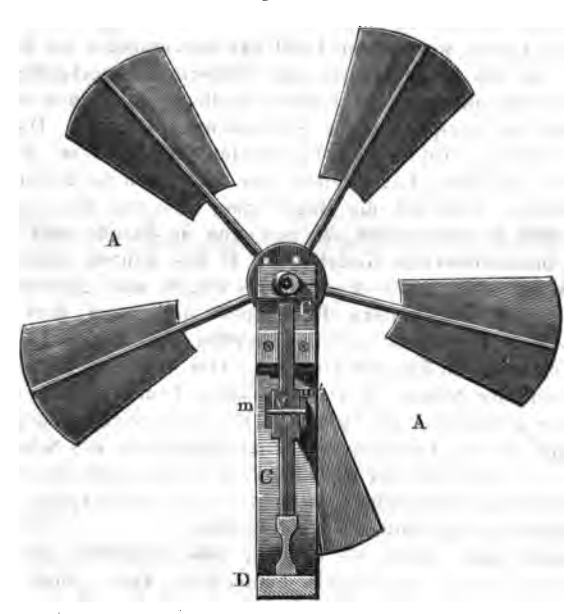


Fig. 135.



Den hauptsächlichsten Theil des Instrumentes bildet ein messingenes Flügelrädchen *A*, nach Art der Windmühlflügel gebaut, welches gegen den Strom gekehrt durch denselben in Umdrehung gesetzt wird und wobei die Geschwindigkeit der Axendrehung der Geschwindigkeit des Wassers proportional ist, womit dasselbe an der betreffenden Stelle fortfließt.

Der Neigungswinkel der ebenen Flügelflächen gegen die Bewegungsrichtung des Wassers beträgt bei unserer Abbildung 45 Grad. Indeß gehören noch drei andere Flügel dazu, wobei der bemerkte Winkel beziehungsweise 55°, 35° und 15° beträgt. Bei kleinerer Geschwindigkeit bedient man sich der Flügel mit größeren Winkeln, um den Wasserstoß wirksamer zu machen. Eben so sind unserem Instrumente Flügel von verschiedenem Durchmesser, bis zu $3\frac{1}{2}$ Zoll engl. abwärts, beigegeben, um auch bei fließenden Wässern von geringer Tiefe Messungen vornehmen zu können.

Die Zahl der Flügel ist in Fig. 134 zwei, in der Durchschnittsfigur 135 aber fünf. Letztere Anordnung ist deshalb vortheilhafter, weil die Geschwindigkeitsangaben offenbar um so wahrscheinlich richtiger werden, je größer die Zahl der Einwirkung ist, die das fließende Wasser auf die Umdrehungen der

Axe verrichtet; mindestens wird diese Schlußfolge für kleine Geschwindigkeiten richtig sein.

Der zweite wesentliche Theil des Instrumentes ist der Zählapparat für die Umdrehungen der stählernen Flügelwelle. Derselbe besteht aus einer in letztere Welle geschnittenen Schraube *B*, die in ein entsprechendes Schraubenrad *C* greift. Die Welle *v* dieses Rades wird von zwei parallelen Bügeln *m*, *m'* (Fig. 135) getragen, in deren Lagerstellen eine ungehinderte Drehung erfolgen kann, während die Bügel *mm'*, sich um einen gemeinsamen Stift *x* schwingend, zu bewegen im Stande sind, der in dem schmiedeeisernen Gestelle *D*, *D* des ganzen Instrumentes befestigt ist. Das andere Ende *y* des Bügels *mm'* geht frei durch einen Schlitz der hintern Bügelhälfte und kann dort mittels einer Schnur *E* derartig erhoben werden, daß Rad und Schraube *B* mit einander in Eingriff kommen. Das Auslösen erfolgt durch Nachlassen der Schnur *E* vermöge einer Feder *z*, die am Gestelle bei *a* befestigt ist, während ihr freies Ende *b* gegen den Bügel *mm'* drückt. Um beim Anziehen (Einrücken) des Schraubenrades *C* ein Aufsetzen der Radzähne auf die Gewinde der Schraube *B* möglichst zu vermeiden, müssen erstere sehr spitz, letztere sehr scharf an den äußeren Kanten sein.

Damit man, wenn es beliebt, eine möglichst große Zahl von Umdrehungen des Flügels beobachten kann, sind auf die Axe *v* zwei Räder wie *C* gesteckt (aus Fig. 135 erkennbar), die beide in dieselbe Schraube *C* greifen, wovon jedoch das eine einen Zahn mehr wie das andere besitzt. Für die gewöhnlich vorkommenden Geschwindigkeiten genügt ein Rad vollständig.

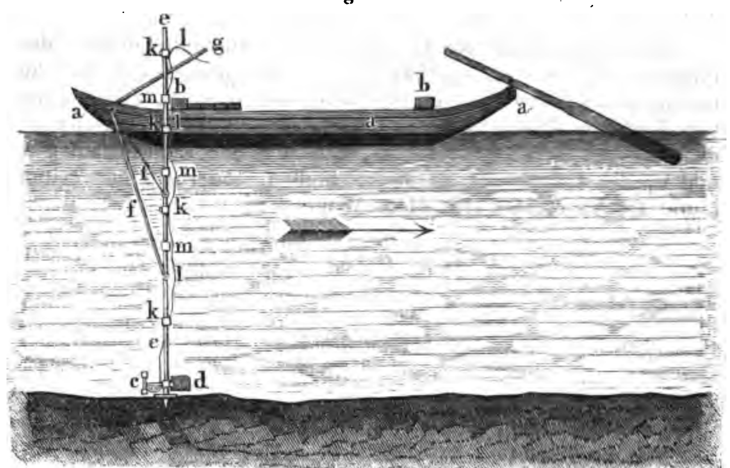
Ein dritter wesentlicher Theil des Instrumentes ist dessen doppelte Messinghülse *f* und *g*. Letztere wird vermöge der Druckschraube *h* mit dem hölzernen Stabe *K* fest verbunden, während die Hülse *f* den Flügel trägt, die sich und mit ihr der ganze Flügel um *h* leicht drehen läßt. Mit *f* ist zugleich ein messingenes Backenstück *G* verbunden, an welchem mittels zweier Stifte *l* und einer Druckschraube *i* ein ebener Steuerflügel (eine Fahne) befestigt werden kann, damit sich in tiefem oder undurchsichtigem Wasser die Flügelaxe von selbst in die Richtung der Stromfäden stellt. Bei der hier angegebenen Anordnung müssen sich Flügel und Steuerfahne stets gemeinsam um die feste Hülse *g* drehen.

Anmerkung. Um Geschwindigkeiten großer Ströme möglichst bequem messen zu können, bedient man sich (wie Brünings *) Funk

*) Wiebeking: „Wasserbaukunst" Bd. 1, S. 190 und Funk: „Darstellung der wichtigsten Lehren der Hydrotechnik" S. 56. Ein etwas anderes Verfahren wendete Lahmeyer a. a. O. S. 48 an.

und Andere) am besten zweier fest mit einander verkuppelter Schiffe, die man vor Anker legt, und mit dem Instrumente im freien Wasser zwischen ihnen operirt. Die neuesten bekannt gewordenen derartigen Messungen hat wohl der französische Ingenieur Baumgarten *) in der Garonne vorgenommen, dessen Flügelaufstellung aus Fig. 136 erhellt.

Fig. 136.



a ist eins der beiden neben einander aufgestellten Schiffe, die durch starke Zangen mit einander verbunden sind, dabei aber 3,^{m}5 freien Raum zwischen ihren höchsten Bordseiten lassen. Der Flügel *c* mit der Fahne *d* ist an einer 2 Centimeter starken Stahlstange *e* befestigt, die durch Seile *f* gegen den auf Biegung der Stange wirkenden Wasserstoß verstrebt ist; die Seilenden *g* dienen auch zur Handhabung der Stange. Am untern Ende der Stange ist eine Scheibe zur besseren Sicherung der Aufstellung angebracht, die ohne Buchstaben in der Figur unter dem Flügel hinlänglich zu erkennen ist. Die Stahlstange ist aus mehreren Theilen zusammengesetzt, kann länger und kürzer gemacht werden, wozu Kuppelmuffe *m* mit Keilen versehen, vorhanden sind. Endlich sind *k* Hülsen mit Oesen zur Führung des Messingdrahtes *l*, um den Zählapparat des Flügels wirksam machen zu können.

Baumgarten bediente sich dieser Aufstellungsweise bis zu 10 Meter Tiefe bei geringen Geschwindigkeiten. Bei Geschwindigkeiten über 2 Meter an der Oberfläche, nur bis zu 4 Meter Tiefe. Für größere Tiefen ließ er die Stange *l* ganz weg, und befestigte den Flügel an dem Ende eines Eisendrahtes, der etwas darüber mit einem linsenförmigen Bleigewichte von 75 Kilogrammen belastet war.

---

*) Annales des Ponts et Chaussées. 1847, 3. pag. 326. Baumgartens ganze vortreffliche theoretische und praktische Abhandlung „Sur le moulinet de Woltmann" etc., kann fleißigen Studirenden wie Praktikern nicht genug empfohlen werden.

§. 116.

Indem hinsichtlich der Theorie des Woltmann'schen Flügels auf das Kapitel „Stoß des Wassers" verwiesen werden muß, entwickeln wir hier einfach die für seinen praktischen Gebrauch hinreichenden Formeln, oder deuten dieselben nur an.

Bezeichnet man die Entfernung des Stoßmittelpunktes der Flügelebenen von der Drehaxe mit r und nimmt an, daß die Geschwindigkeiten c und c_1 des fließenden Wassers, zweier ganz verschiedenen Stromstellen, den beziehungsweisen Flügelgeschwindigkeiten proportional sind und setzt man die Umdrehzahlen n und n_1 der Flügelwelle an diesen Stellen, innerhalb der Zeiten t und t_1, so ergiebt sich ohne Weiteres:

$$c : c_1 = \frac{2r\pi n}{t} : \frac{2r\pi n_1}{t_1},$$

woraus folgt:

$$c = \left(\frac{c_1 t_1}{n_1}\right) \frac{n}{t},$$

oder wenn man $\frac{c_1 t_1}{n_1} = \beta$ und $\frac{n}{t}$, d. i. die Umdrehzahl pr. Secunde $= u$ setzt:

$$\text{I.} \quad c = \beta \cdot u \text{ *)}$$

Damit nicht für $u = 0$ auch $c =$ Null wird (weil in sehr langsam fließendem Wasser der Wasserstoß so gering sein kann, daß der Flügel sich gar nicht umdreht), fügt man dem Werthe in I. noch ein Zahlenglied bei, was wir $= \alpha$ setzen wollen, also erhalten:

$$\text{II.} \quad c = \alpha + \beta u. \text{ **)}$$

Manche Hydrauliker betrachten auch diese letztere Form noch nicht für ausreichend, sondern empfehlen

$$c = \alpha + \beta u + \gamma u^2, \text{ oder}$$

$$c = \alpha + \beta u + \frac{\varepsilon}{\delta + u^2},$$

---

*) Einen andern Beweis dieser Formel, ebenfalls ohne auf die Theorie des Wasserstoßes einzugehen, giebt Eytelwein in den Abhandlungen der mathematischen Classe der Academie der Wissenschaften in Berlin aus den Jahren 1816—1817, Seite 23.

**) Diese Form läßt sich ebenfalls aus der Theorie des Stoßes unbegrenzten Wassers gegen ausweichende ebene Flächen herleiten.

wie Lahmeyer [1]), oder auch

$$c = \beta u + \sqrt{\alpha^2 + \gamma u^2}$$

wie Weisbach [2]), oder endlich wie Baumgarten [3]), der zugleich Schraubenflächen für die Flügel empfiehlt:

$$\frac{c}{u} = H + \sqrt{A + \frac{B}{u^2}}.$$

Nach meinen Erfahrungen ist, insbesondere der Einfachheit wegen und der, der Natur der Sache nach, überhaupt zu erwartenden Genauigkeit zufolge, der Formel II. der Vorzug vor den folgenden zu geben, da sie stets entsprechende Werthe lieferte, sobald namentlich für verschiedene Geschwindigkeiten Flügel mit verschiedenen Neigungswinkeln in Anwendung gebracht wurden.

Mit Ausnahme der Formel I. setzen die übrigen sämmtlich voraus, daß man in den Stand gesetzt ist, den Flügel in Stromstellen einzubringen, deren Geschwindigkeiten, durch anderweitige Mittel oder Verfahrungsweisen, bereits bekannt geworden sind, daselbst die Umdrehzahlen des Flügels zu beobachten und hierauf, nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Bestimmung der Constanten α, β, γ etc. vorzunehmen.

Hierbei hängt natürlich der Werth des betreffenden Endresultates, wenn man sich auch über die Vorzüge der einen oder anderen obiger Formeln verständigt hat [4]), insbesondere von der Richtigkeit dieser als bekannt vorauszusetzenden Geschwindigkeiten ab, ein Umstand, der nicht genug beachtet werden kann, weil die Ermittelung derartiger Geschwindigkeiten nicht leicht ist und streng genommen ein hydraulisches Observatorium voraussetzt. [5])

Kann man die Bekanntschaft solcher Geschwindigkeiten nicht mit der gehörigen Sicherheit voraussetzen, so werden die Fehler jedenfalls am kleinsten, wenn man allein die Formel I. in Anwendung bringt und β nach Angabe des Ausdruckes dafür, nämlich $\frac{c_1 t_1}{n_1}$ oder $\frac{s_1}{n_1}$ ermittelt, wozu man einfach die gleich-

1) a. a. O. Seite 53.
2) Ing.-Mech. Bd. 2. S. 623.
3) a. a. O. p. 339 u. p. 352.
4) Hierüber, so wie über die Ermittelung der Flügelconstanten für specielle Fälle (mit Zahlenbeispielen), lese man das überhaupt empfehlenswerthe Werkchen Bornemann's: „Hydrometrie, oder praktische Anleitung zum Wassermessen". Freiberg 1849. Seite 104 etc.
5) Weisbach: a. a. O. Seite 622. (2. Auflage.)

förmige Fortbewegung des ganz eingetauchten Instrumentes in stillstehendem, völlig ruhigem Wasser benutzen kann [1]), den zurückgelegten Weg $= s_1$ mißt und die während desselben erfolgten Umdrehungen $= n_1$ des Flügels abliest. Für einen und denselben Flügel erhält man stets dieselbe Zahl von Umdrehungen, man mag ihn langsam oder schnell durch einerlei Raum bewegen. [2])

[§. 117.]

Tachometer. [3])

Alle überhaupt zum Messen der Geschwindigkeit fließender Wässer zur Zeit in Anwendung gebrachten Instrumente bilden zwei Hauptgattungen. Erstens solche, wobei feste Körper der Strömung des Wassers frei überlassen werden, sogenannte Schwimmer, deren Anwendung sich darauf gründet, daß sie genau die Geschwindigkeit annehmen, womit sich das Wasser bewegt, auf welchem sie schwimmen. [4]) Zweitens Instrumente, wobei man die statische oder mechanische Wirkung des Wasserstoßes gegen feste Flächen benutzt, um daraus mehr oder weniger direct die Geschwindigkeit des fließenden Wassers zu bestimmen.

Wir werden im Nachstehenden die hauptsächlichsten dieser Instrumente kurz beschreiben.

A. *Schwimmer.*

1. Holzstückchen, Glasflaschen, hohle Kugeln etc. sind die einfachsten derartigen Instrumente und bedürfen keiner weiteren Erklärung. Wenn ein solcher Körper die Geschwindigkeit des Stromes angenommen hat, so braucht man zur betreffenden Bestimmung nur die Zeit zu beobachten, innerhalb welcher er eine bestimmte Strecke

---

1) Baumgarten hat a. a. O. p. 354 und 355 vergleichende Versuche über die Bestimmung der Constanten in stillstehendem oder in fließendem Wasser angestellt, und gefunden, daß es durchaus gleich für die Genauigkeit der Sache ist, welchen Weg man auch bei sonst sorgfältigen Verfahren wählen mag.

2) Gleichförmigen Gang und richtige Haltung des Instrumentes erreicht man bei einiger Uebung sehr bald, namentlich in Fällen wie hier in Hannover, wo zu derartigen Bestimmungen die hochgelegenen, mit reinem Wasser gefüllten und mit ganz geraden Umfassungsmauern versehenen Speisebassins der Wasserkünste für den königlichen Garten zu Herrenhausen mit lobenswerther Munifizenz der betreffenden Behörden zur Disposition gestellt werden.

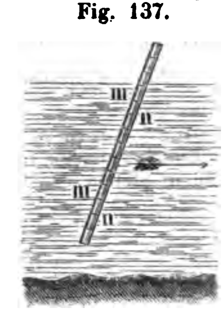
3) Von τάχος Schnelligkeit.

4) Bei verhältnißmäßig großen Körpern ist diese Annahme nicht ganz richtig. So z. B. bewegen sich ohne weitere Triebkraft stromabwärts fahrende Schiffe immer etwas schneller als das Wasser, was man an der Wirksamkeit der Steuerruder bemerken kann.

(ohne durch weitere Hindernisse gestört worden zu sein) durchläuft, worauf der Quotient aus dem Wege dividirt durch die Zeit, die Geschwindigkeit an der Oberfläche giebt. Wie man hieraus auf die Geschwindigkeit eines bestimmten Profiles zu schließen vermag, ist aus dem folgenden Paragraphen zu entnehmen.

2. Der Stab des Cabeo, oder der hydrometrische Stab, Fig. 137, der bereits §. 114 bei den Wiebeking'schen Geschwindigkeits-Messungen im Rheine erwähnt wurde, kann entweder von so einfacher Anordnung wie bei Wiebeking sein, oder wie in unserer Abbildung eine hohle Blechröhre von 30 bis 40 Millimeter Durchmesser mit Deckel und Boden bilden, die aus gleichlangen (vielleicht halbe oder ganze Fuße großen) zusammengeschrobenen Stücken *mn* besteht, die mit kleinen Metallkugeln etc. für die gehörige Eintauchung gefüllt werden kann.

Fig. 137.

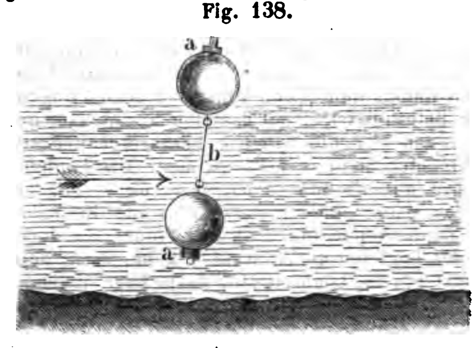


Hat der Stab auf seine ganze Länge einen gleichen Querschnitt (und verhütet man das Aufstoßen auf den Boden, wie die Einwirkung des Windes auf das aus dem Wasser hervorragende Ende), so kann man annehmen, daß er sich bald mit der mittleren Geschwindigkeit des Längenprofiles fortbewegt, in welchem er schwimmt.

Wiebeking *) empfiehlt diesen Stab, für jede beliebige Tiefe des Stromstriches, unter allen Schwimmern am Meisten, und selbst Hagen **) führt eine Stelle an, wo er oft mit großem Vortheile benutzt worden sein soll. Theoretisch handelt am Ausführlichsten über diesen Stab der italienische Professor Venturoli ***).

3. Ein paar Hohlkugeln von Metallblech, Fig. 138, beide von gleichem 6 bis 12 Zoll betragenden Durchmesser, mit Verschraubung *a* und Dichtung versehen, um durch Einfüllungen von Wasser und nachherigem Verschließen die Kugeln zu bestimmten Einsenkungen veranlassen u. die Geschwindigkeit in der Schwimmtiefe der zweiten Kugel angeben zu können, die überdies mit der ersten nahe der Oberfläche schwimmenden durch einen an beiden Enden

Fig. 138.



*) a. a. O. §. 130, S. 181 etc.

**) a. a. O. 2. Theil. Bd. 1. S. 250.

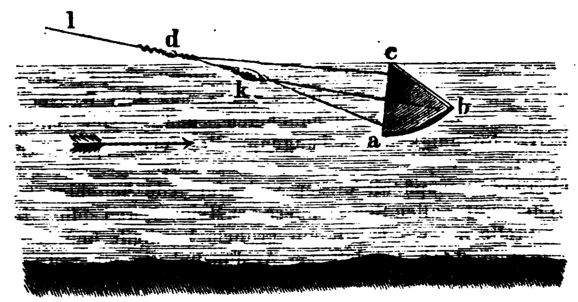
***) Elementi di meccanica e d'idraulica. Vol. II. Septima edizione. Milano 1847. §. 487.

mit Haken versehenen Draht *b* verbunden ist. Durch entsprechende Gestaltung der an die Kugeln befestigten Oesen ist sowohl die Verbindung der Kugeln leicht zu bewirken, als deren Auslösung im Wasser zu verhüten. Nach vielfachen Messungen mit derartigen der polytechnischen Schule in Hannover gehörigen Kugeln schwimmen sie bei weitem unregelmäßiger als die vorbemerkten Schwimmstäbe.

Hat man zuerst die Geschwindigkeit $= V$ beobachtet, womit die obere Kugel schwimmt und nachher ferner die Geschwindigkeit $= u$ der verbundenen Kugeln, so läßt sich die Geschwindigkeit c der unteren Kugel aus der Gleichung $u = \frac{V+c}{2}$ zu $c = 2u - V$ bestimmen. *)

4) Das Log der Seeschiffer. Fig. 139. Ein Schwimmer für den besonderen Fall, daß man von entsprechenden Stellen, z. B.

Fig. 139.



Brücken, namentlich bei Hochwasser, Messungen der Oberflächengeschwindigkeit zu machen beabsichtigt. Es besteht das Log aus drei Haupttheilen, dem Logbrettchen, der Logleine und der Logrolle **), wozu gewöhnlich noch das Logglas, d. h. eine kleine Sanduhr (die halbe Minuten angiebt), kommt. Das Logbrett ist ein hölzerner Quadrant *abc* von etwa 6 Zoll Radius und $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke, an dessen Bogenrande *ab* ein Bleistreifen befestigt ist, damit dasselbe, ins Wasser geworfen so weit einsinkt, daß nur die Spitze *c* hervorragt und zugleich in möglichst senkrechter Stellung fortschwimmt. Die Logleine *l* ist durch kurze Schnüre *da*, *db* und *dc* mit dem Log verbunden, wozu letzteres nahe seinen Winkelpunkten durchbohrt ist. Bei *k* befindet sich eine Art von Zapfenkuppelung (Dog und Pinne), die durch einen starken Ruck an der Logleine gelöst werden kann, damit beim Wiederaufwickeln der letzteren das Logbrett eine flache Lage annimmt.

Weiteres über Anwendung des Logs zu Geschwindigkeitsmessungen findet sich in meiner Geodynamik §. 4.

---

*) Mehr hierüber sehe man in Venturoli a. a. O. §. 482, so wie auch bei Bornemann a. a. O. Seite 92.

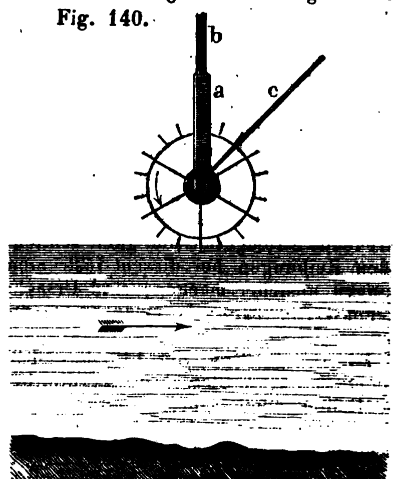
**) Die Logrolle zur Aufnahme, Los- und Aufwickeln der Logleine ist, als selbstverständlich, in unserer Figur weggelassen.

B. Besondere Instrumente.

Mancherlei selbstverständliche Uebel, welche alle Schwimmer mit sich führen, insbesondere die Voraussetzung, daß das Wasser in der Länge des Stromfadens, worin der schwimmende Körper fließt und woraus die Geschwindigkeit abgeleitet werden soll, eine ganz gleichförmige Bewegung habe, daß die Schwimmer nur im Stromstriche mit entsprechender Regelmäßigkeit fortgehen u. s. w., sind bereits seit langer Zeit Veranlassung gewesen, Instrumente zu ersinnen, welche von diesen Uebelständen frei sind. Das einfachste derartiger, aber auch nur zur Bestimmung der Oberflächengeschwindigkeit brauchbare Instrument ist:

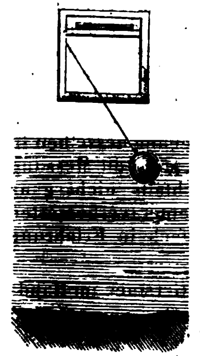
1. Das hydrometrische Strauberädchen, Fig. 140, aus dünnem Blech möglichst leicht gearbeitet, was höchst beweglich im Zapfen läuft, die in einer Gabel *a* ihre Lagerstellen finden. An der Zinke oder dem Stiele *b* der Gabel wird das Rädchen in der gezeichneten Stellung in's fließende Wasser gehalten und die während bestimmter Zeit erfolgten Umdrehungen durch die Zahl der Windungen eines dünnen Fadens *c* bestimmt, den man auf der Welle des Rädchens aufwickeln läßt.

Fig. 140.



Wegen ihrer Axenreibung, der schiefen Eintauchung der Radschaufeln, auch weil letztere immer etwas Wasser mit in die Höhe nehmen, können die hiermit angestellten Geschwindigkeitsmessungen keine großen Ansprüche auf Sicherheit machen.

Fig. 141.



Aus letzterer Ursache und namentlich um Geschwindigkeitsmessungen an jeder beliebigen Stelle eines fließenden Wassers vornehmen zu können, erdachte man die ferner hier zu nennenden Instrumente, wozu auch der bereits beschriebene Woltmann'sche Flügel gehört und wovon wir hier zunächst aufführen:

2. Das hydrometrische Pendel oder den Stromquadranten, Fig. 141. Eine an einem Faden aufgehangene Kugel *A*, von größerem specifischen Gewichte als das Wasser, wird dem Stoße des strömenden Wassers ausgesetzt und aus dem Abweichungswinkel der Fadenrichtung von der Vertikalen, auf die betreffende Stromgeschwindigkeit geschlossen. Bei Messungen in einiger Tiefe wird

dies Instrument ganz unbrauchbar, da die Wirkung des Wasserstoßes gegen den Faden einen andern Abweichungswinkel erzeugt, als ohnedem wahrgenommen werden würde, betreffende Rechnungen aber zu keinem Ziele führen. *)

3. Die hydraulische Schnellwage des Michelotti **), Fig. 142, aus einer ebenen Platte *A* bestehend, gegen welche das fließende Wasser stößt und wobei dieselbe an einer Stange *B* befestigt ist, welche mit einem Hebel *DE* derartig zu einem Ganzen vereinigt werden kann, daß beide zusammen an einer rechtwinklig auf *DE* stehenden Axe aufgehangen und um diese zu Schwingungen veranlaßt werden können. Die betreffenden Hebellager werden von einem besonderen Gestelle (in der Figur weggelassen) getragen. ***) Wie man durch geeignete Verschiebung der Laufgewichte *K*, wenn die Platte *A* der Stromwirkung ausgesetzt ist, eine Vertikalstellung der Stange *B* und Horizontalstellung des Hebels *DE* bewirken kann, ist von selbst klar. Aus den betreffenden Dimensionsverhältnissen der Platte, des Hebels und der Gewichte *K* läßt sich auf die Größe des Wasserstoßes und hiervon wiederum auf die betreffende Stromgeschwindigkeit schließen. Die verhältnißmäßig großen Reibungen bei diesem Instrumente, die selbst genauere Stoßmessungen unsicher machen, sind Ursachen, daß auch dies Instrument gegenwärtig Nirgends mehr Anwendung findet.

Fig. 142.

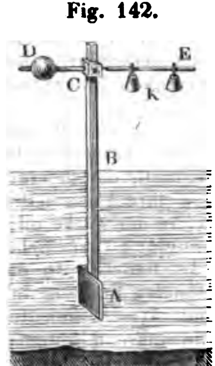
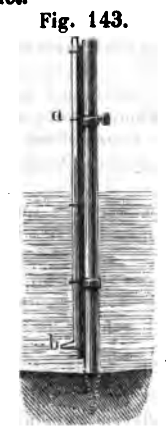


Fig. 143.



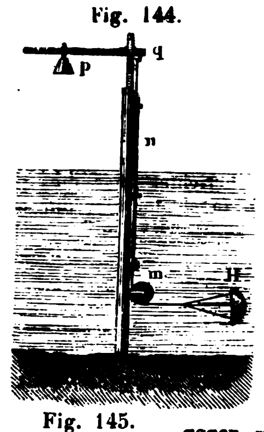
4. Pitot's Röhre, Fig. 143, besteht aus zwei nicht zu engen Glasröhren *a*, die beide an den Enden offen sind, wovon aber die eine am unteren Ende rechtwinklig umgebogen und zu einer entsprechend feinen trichterförmigen Spitze *b* gestaltet ist. In letzterer Röhre steigt das Wasser um eine der Geschwindigkeit des fließenden Wassers in gewissem Verhältnisse proportionale Größe höher, als in der durchaus geraden Röhre, aus welcher Höhendifferenz auf die betreffende Stromgeschwindigkeit geschlossen werden kann. Da verschiedene andere Umstände wie die Geschwindigkeit des betreffenden fließenden Wassers auf die Erhebung desselben in den Röhren mitwirken können, so ist die Messung mit diesem Instrumente gleichfalls nicht ganz sicher, wie Referent selbst mit einer (verbesserten Weisbach'schen) Röhre mehrfach in Erfahrung

*) Sehr speciell hat sich mit diesem Instrumente Gerstner im Handbuche der Mechanik, Bd. 2, §. 229, beschäftigt.

**) Michelotti: Hydraulische Versuche, Seite 220, §. 36.

***) Michelotti a. a. O., Tafel IV, Fig. 42.

Fig. 144.



gebracht hat. Dupuit[1]) in seinem neuesten Werke über die pariser Wasserleitungen empfiehlt diese Röhre immer noch, so wie auch Weisbach[2]) ihr, gewiß mit Recht, nicht allen Werth abspricht.

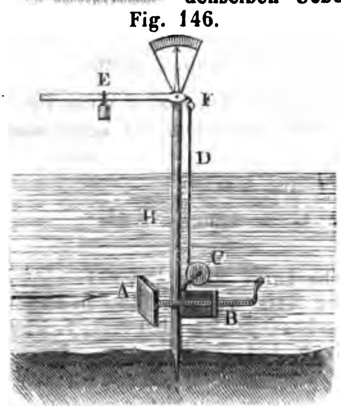
5. Wasserhebel des Lorgna, Fig. 144. Statt der Platte bei Michelotti, wogegen das Wasser stößt, ist hier eine hohle Halbkugel *H* angebracht, die durch einen über eine Rolle *m* durch eine Röhre *n* gehenden Faden mit einer gewöhnlichen Hebelschnellwage *pq* in Verbindung gebracht ist. Auch dies Instrument ist gegenwärtig außer Gebrauch.

Fig. 145.

6. Wasserfahne des Ximenes, Fig. 145. Dabei ist *A* eine lothrechte Spindel, die um Zapfen an beiden Enden drehbar, unten aber mit einer Platte *B* versehen ist, gegen welche man ebenfalls das fließende Wasser stoßen läßt. Am oberen Ende der Spindel *A* ist eine horizontale Scheibe *D* angebracht, an dieser eine Schnur befestigt und solche wiederum über eine Leitrolle *E* geschlagen, an deren äußersten Ende eine Schale zum Auflegen von Gewichten vorhanden ist. Letzteres kann man sich leicht so groß denken, daß die Scheibe *B* normal von den Wasserfäden getroffen wird, deren Geschwindigkeit bestimmt werden soll. Ximenes hat mit diesem Instrumente, zu seiner Zeit in Italien, namentlich im Arnoflusse, zahlreiche Versuche angestellt, die noch heute als brauchbar betrachtet werden.[3])

7. Tachometer von Brünings, Fig. 146, ein Instrument, was zwar in der Hauptsache an denselben Uebeln der zuletzt aufgeführten leidet, aber deshalb berühmt geworden ist, weil Brünings seine zahlreichen, bereits vorher erwähnten und theilweise aufgeführten großartigen Versuche in den Hauptflüssen Hollands damit angestellt hat, und weil dies Instrument zum Messen der Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen

Fig. 146.



1) Distribution des eaux, 2e Partie, p. 42, Pl. V.

2) Polytechn. Centralblatt, 1847, S. 529.

3) Man sehe Woltmann's Beiträge zur hydraulischen Architektur, Bd. 3, S. 310.

derselben Perpendikularen, unmittelbar nach einander, benutzt werden kann, ohne daß man es zum betreffenden Ablesen aus dem Wasser zu nehmen nöthig hat. Die Stoßplatte *A* nebst dem Kasten *B*, zur Führung ihres Armes und der Leitrolle *C* für den Faden *D*, welcher die Stoßkraft des Wassers auf den Hebel *EF* überträgt, sind an der festen Stange *H* mittelst Zahnstangen und Zahnradanordnungen (die in unserer Figur weggelassen sind) verschiebbar und beliebig höher und niedriger zu stellen. Ausführlich berichtet über dies Instrument mit Beigabe mehrerer Abbildungen (auch der hier nur erwähnten Theile) Wiebeking. [1])

§. 118.

Geschwindigkeitsformeln.

Ungeachtet der vielfachen bis jetzt angestellten Versuche ist ein allgemeines Gesetz für die Größe der Geschwindigkeiten der Wasserfäden an den verschiedenen Stellen eines Profiles noch nicht aufgefunden worden, auch der Natur der Sache nach wenig oder gar keine Hoffnung zu einer derartigen Auffindung vorhanden, selbst wenn es gelänge, noch weit vollkommenere Meßinstrumente zu ersinnen, als es der beste Woltmann'sche Flügel mit den noch so sorgfältig ermittelten Coefficienten zur Zeit ist. [2])

Als Anhaltspunkt für vorkommende praktische Fragen können indeß, bis auf Weiteres, Lahmeyer's [3]) neueste Formeln dienen, obwohl wir dabei die Bemerkung nicht unterlassen können, diese immer noch mit Vorsicht anzuwenden, da sich selbst auch gegen die Herleitung derselben mancherlei gegründete Bedenken aufstellen lassen. [4])

I. Bezeichnet C die größte Geschwindigkeit und c die mittlere einer Perpendikulare, so kann man setzen:

$$c = 0{,}937 \,.\, C - 0{,}0252 \,.\, C^2 \text{ für Meter,}$$

$$c = 0{,}937 \,.\, C - 0{,}00737 \,.\, C^2 \text{ für hannov. Fuße.}$$

II. Bezeichnet w die Geschwindigkeit am Boden einer Perpendikularen, so wie t die ganze Tiefe derselben, so kann man annehmen:

$$w = (0{,}8617 - 0{,}0469\ t)\ C \text{ für Meter,}$$

$$w = (0{,}8617 - 0{,}0137 \,.\, t)\ C \text{ für hannov. Fuß.}$$

---

1) Theoretisch praktische Wasserbaukunst, Bd. 1, S. 187.
2) Recht werthvoll zur Begründung dieser Zweifel sind von Hagen gemachte Bemerkungen. Wasserbaukunst Th. II, Bd. 1, S. 289.
3) Förster's Bauzeitung. 1852. S. 158.
4) Bornemann: Der Ingenieur. Erster Band. Freiberg 1848, S. 333.

III. Bezeichnet ferner dabei c_1 die Geschwindigkeit in der Tiefe t_1, so soll sein:

$$c_1 = \left\{t - (0{,}1383 + 0{,}0469\ t)\ t_1\right\} \frac{c}{t} \text{ für Meter,}$$

$$c_1 = \left\{t - (0{,}1383 + 0{,}0137\ t)\ t_1\right\} \frac{c}{t} \text{ für hannov. Fuß.}$$

IV. Bezeichnet endlich V die größte und v die mittlere Geschwindigkeit eines Querprofiles, so wäre zu setzen:

$$v = 0{,}75 \,.\, V.$$

Anmerkung 1. Nach Dubuat*), aus Versuchen an kleinen Canälen, ist für Metermaße:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} w = (\sqrt{V} - 1)^2; \\ v = \dfrac{V + w}{2} \text{ und hieraus:} \\ v = 0{,}25 + (\sqrt{V} - 0{,}5)^2. \end{cases}$$

Eytelwein **) setzt:

$$\text{VI.} \quad \begin{cases} w = C - 0{,}008\, Ct \text{ für rhnl. Fuß,} \\ v = \dfrac{w + C}{2} \text{ und daher:} \\ v = \dfrac{C + (1 - 0{,}008\, t)\, C}{2} = (1 - 0{,}004\, t)\, C. \end{cases}$$

Letztere Formeln setzen eine gleichmäßige Abnahme der Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Boden zu voraus, was in Wirklichkeit nicht immer der Fall ist. Deshalb und weil es sich in der Regel nur um Auffindung der mittleren Geschwindigkeit handelt, stellte Prony ***) aus den Dubuat'schen Versuchen eine Formel auf, wobei c unmittelbar aus C bestimmt wird.

Prony's Formel für Metermaß ist

$$\text{VII.} \quad c = \frac{C\,(2{,}372 + C)}{3{,}153 + C}.$$

Näherungsweise und wenn die größte Geschwindigkeit innerhalb der Grenzen 0,2 bis 1,5 Meter liegt, schlägt Prony vor, zu setzen: $c = 0{,}816 . C$ oder $c = 0{,}8 . C$ beziehungsweise bis auf $\frac{1}{25}$ oder $\frac{1}{11}$ genau.

---

*) Principes d'hydraulique, Nr. 69.

**) Handbuch der Mechanik, 2. Auflage, §. 133.

***) Recherches physico-mathématiques sur les eaux courantes, Paris 1804. Deutsch von Langsdorf, 1812, unter dem Titel: Theoretisch praktische Abhandlung über die Leitung des Wassers etc., Nr. 194, Seite 98, so wie in den „Recueil de cinq tables". Paris 1825, p. 59.

Baumgartner [1]) hält die Prony'sche Formel, namentlich für größere Geschwindigkeiten, unbrauchbar, da sie nur auf Versuche gestützt ist, wobei die größte Geschwindigkeit an der Oberfläche $1^m,2994$ war. Er räth deshalb, den rechten Theil der Formel VII. mit 0,8 zu multipliciren, als Mittelwerth aber $c = 0,842\, C$ zu setzen.

Dupuit [2]) entwickelt theoretisch auf ganz interessante Weise:

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} c_1 = C - \dfrac{C-w}{t^2} \,.\, z^2, \\ c = \dfrac{2C+W}{3}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet z die Tiefe, welche der Geschwindigkeit c_1 entspricht, t abermals die ganze Tiefe der Perpendikuläre, deren größte Geschwindigkeit C ist.

Aus letzteren beiden Gleichungen findet man leicht den Werth von z, welcher der mittleren Geschwindigkeit c entspricht, zu

$$z = \tfrac{1}{3}\, t \sqrt{3} = 0,577 \,.\, t.$$

Dies Resultat, so wie das was aus der Form der ersten Gleichung VIII. hervorgeht, stimmt namentlich mit den Messungsresultaten Defontaine's im Rheine, nach welchen die Geschwindigkeitsscale eine Parabel ist und der Wasserfaden, welcher der mittleren Geschwindigkeit einer Perpendikulären entspricht, sich etwa in $\frac{3}{5}$ der Tiefe unter der Oberfläche befindet. [3])

Anmerkung 2. Für praktische Zwecke sind ferner nachstehende Bemerkungen und Werthe nicht ohne Nutzen, welche sich darauf beziehen, inwiefern durch fließendes Wasser am Boden seines Bettes liegendes Material mit fortgenommen, oder unter Umständen die Cohäsion der Bodenmasse selbst überwunden werden kann.

Dubuat [4]) legte für ersteren Zweck betreffendes Material auf den Boden eines hölzernen Canals und gab letzterem immer größer werdende Neigungen, bis das Material vom fließenden Wasser mit fortgenommen wurde. [5]) Das Ergebniß der Versuche war Nachstehendes: [6])

---

1) Annales du ponts et chaussées, 1843, T. 3, p. 361.
2) Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes. Paris 1848. Nr. 18.
3) D'Aubuisson, Hydraulique §. 152 und §. 153, und Défontaine: Annales des ponts et chaussées, Tome VI, 1833.
4) Principes. Nr. 399.
5) Weiteres über diesen Gegenstand findet man in Hagen's Wasserbaukunst, Th. II, Bd. 1, S. 162. Ferner in Schubert's: Theorie der Construction steinerner Bogen-Brücken. Erster Theil. S. 366.
6) Hagen hat die Wiederholung dieser Versuche nicht glücken wollen. Jedenfalls ist zu beachten, daß Dubuat eine constante Beziehung zwischen Oberflächen- und Bodengeschwindigkeit voraussetzt. Man lese hierüber Hagen Bd. I, Th. II, S. 360 u. 361.

Material.	Geschwindigkeiten, wobei das Material aufhörte, mit fortgerissen zu werden	
Brauner Töpferthon	3 pariser Zoll	0,081 Meter
Sandkörner d. Seine wie Anis groß	4 „ „	0,108 „
desgl. wie Erbsen groß	7 „ „	0,189 „
desgl. wie Bohnen groß	12 „ „	
Meergeschiebe, abgerundet von		0,325 „
1 Zoll Durchmesser	24 „ „	
Feuersteine, kantig, von der Größe der Hühnereier	36 „ „	0,975 „

Zur Beurtheilung, bei welchen Geschwindigkeiten Böden und Wände der Fluß- und Canalbetten angegriffen werden können, mag nachstehende Tabelle dienen, welche der von Telford und Nimmo redigirten Edinburger Encyklopädie Artikel „Bridge“ entlehnt ist.

Geschwindigkeit pr. Secunde		Material, welches diesen Geschwindigkeiten widersteht, den größeren aber nachgiebt
Fuß engl.	Meter	
0,25	0,076	Schlamm, aufgelöste Erde.
0,50	0,152	Fetter Thon.
1,0	0,305	Sand.
2,0	0,609	Grand.
3,0	0,914	Abgerundete Kieselsteine.
4,0	1,220	Eckige Kieselsteine.
5,0	1,520	Conglomerate, Schiefer.
6,0	1,830	Geschichtete Felsen.
10,0	3,05	Ungeschichtete, harte Felsen.

§. 119.

Bewegende Kraft fließender Wässer.

Aus den Gesetzen der Hydrostatik läßt sich ohne Weiteres der Schluß ziehen, daß Wasser, welches sich in Fluß- oder Canal-Betten fortbewegt und dabei allein der Schwerkraftwirkung unterworfen ist, keine horizontale Oberfläche bilden kann. Diese Thatsache und weitere Erfahrungen waren Veranlassung, daß Dubuat *) an die Spitze aller Bewegungsbetrachtungen in Betten fließender Wässer den Satz stellte:

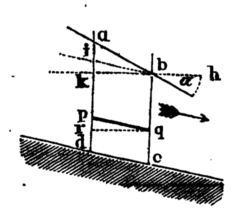
*) Principes. Nr. 15.

»die bewegende Kraft in Fluß- oder Canal-Betten strömenden Wassers rührt blos von der Neigung seiner Oberfläche her.«

Nachstehendes wird zur weiteren Aufklärung dieses Satzes dienen.

Bei der fraglichen Bewegung giebt sich die Wirkung der Schwerkraft in zweifacher Weise zu erkennen, erstens indem sie jedes Flüssigkeitselement über das darunter liegende, wie auf einer schiefen Ebene herablaufend accelerirt, zweitens aber auch eine Druckdifferenz an den Enden der betreffenden Wasserelemente erzeugt. Zur betreffenden Erläuterung werde zunächst Fig. 147 benutzt, wobei *abcd* eine Wasserschicht zwischen zwei derartig nahe liegenden vertikalen Ebenen *ad* und *bc* darstellen soll, daß sich darin Gefälle und mittlere Geschwindigkeit nicht verändern, *ab* der Oberwasserspiegel, α dessen Neigungswinkel gegen den Horizont, endlich *pq* ein beliebiges Wassermolecül ist, dessen Länge $= 1$ gesetzt werden mag.

Fig. 147.



Denkt man sich *pq* parallel zum Boden *dc* (dessen Neigung von α verschieden), so ist die Acceleration dieses Molecüls, wenn *rq* $\|$ zum Horizonte *kh* gezogen wird, durch $g\,.\,\overline{pr}$ darzustellen (§. 20 Geodynamik), die bewegende Kraft also durch $mg\,.\,\overline{pr}$, wenn *m* die Masse von *pq* bezeichnet. Außerdem wirkt aber auf den Punkt *p* noch ein resultirender Druck, dessen Größe durch $mg\,(\overline{ap} - \overline{bq}) = mg\,\overline{ia}$ auszudrücken ist, so daß also die Gesammtkraft, welche *pq* zur Bewegung antreibt, ist:

$$mg\,(\overline{pr} + \overline{ia}),\ \text{oder}$$

weil $\overline{pr} = \overline{ik}$ auch $mg\,.\,(\overline{ik} + \overline{ia}) = mg\,.\,\overline{ak}$, wofür der Kleinheit der ganzen Schicht *ac* wegen gesetzt werden kann:

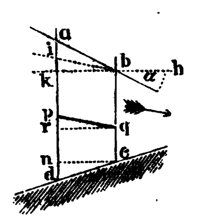
$$mg\,.\,\sin\alpha.$$

Da dasselbe von allen Molecülen wie *pq* nachzuweisen ist, so folgt für die ganze Schicht $\overline{ac}$, wenn deren Masse mit m' bezeichnet wird,

$$m'g\,\sin\alpha,$$

was genau dem Dubuat'schen Satze entspricht.

Fig. 148.



Hat der Boden dc **die Neigung wie Fig. 148, so ist die fragliche Erklärung nur noch auf das am Boden liegende Wasser-Molecül** dc **auszudehnen. Für die bewegende Kraft dieses Elementes ist aber zu setzen, wenn** $nc \parallel kh$ **ist,**

$$- m \cdot g\,(\overline{nd})$$

und für den resultirenden Druck in d**:**

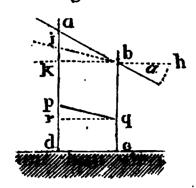
$$mg\,(\overline{ad} - \overline{bc}) = mg\,(\overline{nd} + \overline{ak}).$$

Die gesammte bewegende Kraft ist daher:

$$mg\,(-\overline{nd} + \overline{nd} + \overline{ak}) = mg\,.\,\overline{ak} = mg\,.\,\sin\alpha$$

wie vorher.

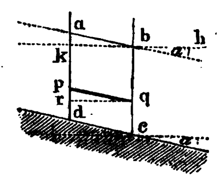
Fig. 149.



Ist der Boden wie in Fig. 149 horizontal, so wird in Bezug auf das Wassermolecül $\overline{dc}$ die relative Schwerkraft zu Null, für den resultirenden Druck in d ergiebt sich aber:

$$mg\,(\overline{ad} - \overline{bc}) = mg\,.\,\overline{ak} = mg\,.\,\sin\alpha.$$

Fig. 150.



Ist endlich die Oberfläche dem Boden parallel, wie in Fig. 150, so wird ai der vorigen Figuren zu Null, d. h. es wirkt allein die relative Schwerkraft, die Bewegung von $\overline{pq}$ wird durch die Kraft $mg\,.\,\overline{pr} = mg\,.\,\overline{ak}$ veranlaßt, und daher die der ganzen Schicht ac wiederum durch:

$$m'g\,\sin\alpha.$$

Zweites Kapitel.

Gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen.

§. 120.

Wäre das in Canalbetten fließende Wasser im Stande, den vorherbetrachteten Einwirkungen der Schwerkraft frei zu folgen,

so würde sich die Geschwindigkeit seiner Bewegung fortwährend vergrößern und an der tiefsten Canalstelle zu einem Maximum werden. Daß dies nicht der Fall ist, lehrt ohne Weiteres die Erfahrung, besonders bei Strömen, Flüssen und Bächen, deren Wässer um so langsamer fließen, je mehr sie sich den Enden der schiefen Ebenen nähern, auf welchen sie herabfließen, d. h. je näher sie ihren Mündungen kommen.

Die Ursachen dieser Erscheinung liegen in den verschiedenen Widerständen, welche die Wassertheilchen bei ihrer Fortbewegung hauptsächlich durch Anhängen (Adhäsion) an den Wänden und Böden der Betten und durch die stete Ueberwindung der Cohäsion erfahren, die zwischen den Flüssigkeitselementen selbst besteht.

Mathematische Ausdrücke, welche die Gesetze dieser Erscheinungen für alle Fälle darstellen, existiren zur Zeit noch nicht, höchst wahrscheinlich, weil man außer Stande war, die wahre Beschaffenheit dieser Widerstände kennen zu lernen, inzwischen ist es doch gelungen, für den Fall der gleichförmigen Bewegung des Wassers in regelmäßigen und geradlinigen Canälen, einige Aushülfe zu schaffen, die in vielen praktischen Fällen auszureichen vermag.

Gleichförmigkeit der Bewegung des Wassers in Canälen setzt aber Gleichheit der Querprofile, constante Breite und Tiefe und somit gleiche mittlere Geschwindigkeit und unveränderliches Gefälle voraus, so daß also in diesem Falle die Oberfläche des Wassers stets dem Canalboden parallel sein wird. Fig. 130 und Fig. 150 können sich daher nur auf gleichförmige Bewegung des Wassers beziehen. *)

Unter den vielen Formeln, durch welche man die fragliche Bewegung darzustellen bemüht gewesen ist, hat sich namentlich die des französischen Ingenieurs Prony das Vertrauen der Sachverständigen und Praktiker erworben.

Hierbei stellt man den Widerstand, welchen das bewegte Wasser überhaupt erfährt, durch

$$(1) \quad \frac{g}{\gamma} p (\alpha v + \beta v^2) l$$

dar, wobei γ die Dichte der Flüssigkeit, g die Acceleration der Schwerkraft bezeichnet, α und β aber constante Coefficienten sind, welche aus Versuchen bestimmt werden müssen. Das Glied

---

*) Auch der Canal ist dabei im Beharrungszustande befindlich vorausgesetzt, d. h. Grund und Ufer werden selbst durch die höchsten Wasserstände nicht verändert, können bei mäßiger Geschwindigkeit nicht verschlammen etc.

αv entspricht dabei vorzugsweise der Cohäsion des Wassers, βv^2 aber den Wandwiderständen.

Benutzt man diesen Ausdruck zur mathemathischen Darstellung des ebenfalls von Dubuat [1]) aufgestellten Satzes:

»daß wenn sich Wasser gleichförmig in offenen Canälen fortbewegt, der Widerstand, welchen dasselbe erfährt, gleich der bewegenden Kraft des Wassers ist, so erhält man mit Zuziehung des vorigen Paragraphen sofort die Gleichung:

$$(2)\quad Mg \sin\alpha = \frac{\gamma}{g}\, p\,(\alpha v + \beta v^2)\, l,$$

worin $\sin\alpha = \frac{h}{l}$ und M die Wassermasse ist, welche der Längenstrecke l des Canales entspricht, so daß $M = \frac{\gamma a l}{g}$, also statt (2) gesetzt werden kann:

$$(3)\quad g\,\frac{h}{l}\cdot\frac{a}{p} = \alpha v + \beta v^2.$$

Führt man hier A für $\frac{\alpha}{g}$ und B für $\frac{\beta}{g}$ ein, so folgt endlich:

$$\text{I.}\quad \frac{a}{p}\cdot\frac{h}{l} = Av + Bv^2.$$

Prony hat zuerst nach einer Methode von Laplace [2]) die Werthe der Coefficienten α und β so wie A und B aus 31 Versuchen Chezy's und Dubuat's [3]) für Metermaß bestimmt zu: $\alpha = 0{,}000436$; $\beta = 0{,}003034$, so wie hiernach:

$$A = 0{,}00004445,$$
$$B = 0{,}00030931.$$

Demzufolge wird aus I:

$$\text{II.}\quad \frac{a}{p}\cdot\frac{h}{l} = 0{,}00004445.v + 0{,}00030931\, v^2. \text{ [4])}$$

Zur Erleichterung der betreffenden Rechnungen kann man sich der von Prony [5]) berechneten Tafeln bedienen, die auch Redtenbacher in seinem Werke: „Resultate für den Maschinenbau“ aufgenommen hat.

---

1) Principes, Nr. 20.
2) Mechanik des Himmels, 2. Theil, §. 40.
3) Man sehe die hier folgende Anmerkung 2.
4) Recherches etc., Langsdorf'sche Uebersetzung, S. 142 und Recueil etc., §. III, p. 12.
5) a. a. O.

Für hannoversche Fuß erhält man aus I:

$$\text{III.} \quad \frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}00004445 \cdot v + 0{,}000090336 \cdot v^2.$$

Anmerkung 1. Die erste für Praktiker brauchbare Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen scheint 1775 der französische Ingenieur Chezy und zwar unter der Gestalt: $a\frac{h}{l} - \frac{pv^2}{k^2} = v$ aufgestellt zu haben [1]), wobei k einen aus Versuchen zu bestimmenden Coefficienten bezeichnet, die übrigen Größen aber die bisherige Bedeutung haben. Die Wenigen hierzu von Chezy unternommenen Versuche (am Abwässerungsgraben von Courpalet und in der Seine) und die Umstände, unter welchen sie angestellt sein mochten, lieferten nicht denjenigen Werth, um der Formel das Vertrauen der Praktiker abzugewinnen. Aus diesen und anderen Gründen stellte der französische Ingenieur Oberst Dubuat eine große Anzahl sorgfältiger Versuche, größtentheils an künstlichen besonders für den fraglichen Zweck construirten Canälen an (siehe die folgende Anmerkung), denen er die Formel anpaßte:

$$v = \frac{297\left(\sqrt{\frac{a}{p}} - 0{,}1\right)}{\sqrt{\frac{l}{h}} - lgnt\sqrt{\left(\frac{l}{h} + 1{,}6\right)}} - 0{,}3\left(\sqrt{\frac{a}{p}} - 0{,}1\right),$$

worin alle Größen in französischen Zollen ausgedrückt sind und die er in seinen berühmten „Principes etc.“ 1779 zum ersten Male bekannt machte. [2])

Obwohl die Uebereinstimmung der Versuche mit den aus diesen Formeln berechneten Werthen gut genannt werden konnte, so war doch die complicirte Gestalt des Ausdrucks, so wie der Mangel auch jeder wissenschaftlichen Begründung Ursache, daß man sich bemühte, andere Formeln aufzustellen, welche diesen Anforderungen besser entsprächen.

Versuche von Coulomb [3]) zur Ermittelung der Cohäsion und überhaupt der Widerstände, welche Flüssigkeiten zeigen, wenn man in ihnen feste Körper langsam bewegt, führten auf den Satz, daß ein mathematischer Ausdruck zur Darstellung dieser Erscheinung vor Allem aus zwei Gliedern bestehen müsse, wovon das eine die erste Potenz, das andere die zweite der betreffenden Geschwindigkeit in sich fasse. Girard [4]) hatte zuerst den glücklichen Gedanken, die von Coulomb auf-

1) Mémoire de l'académie des sciences 1813 — 1815, Vorrede zu einer Abhandlung Girard's über die Bewegung des Wassers in Capillarröhren, so wie auch in Girard's Werke: Rapport etc. sur le canal de l'Ourcq, Paris 1803, p. 33, und endlich in dessen Mémoires sur le canal de l'Ourcq. 18 . T. I, p. 327.
2) Pag. 69 der Ausgabe von 1816.
3) Mémoire de l'Institut national, Prairal an IX (1800), p. 246.
4) Rapport etc. sur le canal de l'ourcq. Paris, an XII (1803), p. 36 und 42.

gefundenen Gesetze auch auf Fälle anzuwenden, wobei sich die Flüssigkeit bewegt, der mit ihr in Berührung befindliche feste Körper aber ruht, d. h. der Analogie nach, auch auf die Bewegung des Wassers in Canälen. Die von Girard hiernach aufgestellte Gleichung hatte die Form:

$$\frac{ah}{l} - rp\,(v + v^2) = 0,$$

wobei r einen gemeinsamen constanten Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den Girard aus 8 Versuchen Chezy's und Dubuat's ermittelte. Zu bemerken ist überdies hierbei, daß Girard später seine Formel analytisch abzuleiten bemüht war und dabei von der Aehnlichkeit ausging, welche stattfindet zwischen dem in irgend einer Leitung fließenden Wasser und einer völlig biegsamen Kette, die in derselben Leitung herabsinkt, auch sich bei den betreffenden Entwickelungen auf L. Eulersche Arbeiten über die Bewegung der Flüssigkeiten stützte. *)

Gegen die von Girard gewählte Form, eines gemeinsamen Coefficienten für beide Glieder der Parenthese, erhob zuerst Prony ganz richtige Bedenken **), indem jedes der Glieder einen anderen verschiedenen Gesetzen folgenden Widerstand repräsentire, und daß man sich überdies, bei der Natur des ganzen Gegenstandes, alle Mittel vorbehalten müsse, um den absoluten Werth des fraglichen Widerstandes der wirklichen Erscheinung möglichst entsprechend anzupassen. Hierauf gestützt setzte (Nr. 155, a. a. O.) Prony:

$$g\frac{h}{l}\cdot\frac{a}{p} = \alpha v + \beta v^2,$$

eine Gleichung, die oben (3) auf einfachem Wege gewonnen wurde.

Giebt man diesem Ausdrucke die Gestalt $g\,\frac{ha}{lpv} = \alpha + \beta v$, so bildet der rechte Theil die Gleichung einer geraden Linie, weshalb man betreffende Versuche leicht graphisch darstellen und hieraus die Uebereinstimmung mit der gewählten analytischen Form beurtheilen kann. Prony hat seiner wiederholt angeführten Abhandlung (Recherches etc.) desfallsige Abbildungen beigegeben, auf welche hier verwiesen werden muß.

Anmerkung 2. Von den 31 Versuchen, welche Prony zur Bestimmung der Coefficienten A und B benutzte, sind von Dubuat 23 an einem künstlichen Canale von 132 Fuß (franz.) Länge angestellt, dessen Querschnitte beliebig rectangulär oder trapezförmig gestaltet werden konnten. ***) Am unteren Ende des Canales war ein gemauertes regelmäßiges Aichbassin von 12 Fuß Länge, 9 Fuß Breite und 5 Fuß Tiefe angebracht, in welches das Canalwasser strömte und gemessen werden konnte. Die mittleren Geschwindigkeiten, bei den verschiedenen Nei-

*) Mémoire sur le canal de l'ourcq, T. I, p. 246 und p. 276.

**) Recherches etc., deutsch von Langsdorf, Nr. 139.

***) Principes, Nr. 366 und ferner. Im schönen Auszuge auch von Weisbach in der Maschinenencyclopädie, Artikel „Bewegung des Wassers", Seite 94.

gungen, welche man dem Canale gab, wurden durch Division der Querschnitte in die pr. Secunde abgeflossene Wassermenge ermittelt. Vier Versuche Dubuat's am Canale du Jard und 3 Versuche im Haine-Flusse, sind gleichfalls benutzt, wobei jedoch nur die Geschwindigkeiten an der Oberfläche gemessen und daraus mit Hülfe einer Dubuat'schen Formel (V. §. 118) die mittleren Geschwindigkeiten abgeleitet wurden.

Von den Chezy'schen Messungen am Graben von Courpalet sind nur die Thatsachen bekannt geworden, wie solche Girard ohne Weiteres mittheilt. Indeß müssen solche Vertrauen verdient haben, da Prony gerade diesen Versuch vielen andern Dubuat's vorgezogen hat. Die ganze Länge des Grabens betrug 31389,724 Meter und das Totalgefälle 1,1144 Meter.

Nachfolgende Tabelle enthält sämmtliche 31 gedachten Versuche in entsprechender Zusammenstellung, die auch besonders deshalb hier aufgeführt werden, um die Größenverhältnisse kennen zu lernen, innerhalb deren Grenzen die Zahlenwerthe der Prony'schen Formel noch brauchbar genannt werden können.

Bezeichnung oder Nummer des Versuches	Relatives Gefälle $= \frac{h}{l}$	Wassertiefe in franz. Zollen	Canalquerschnitt $= a$, in franz. Quadratzollen	Wasserperimeter $= p$, in franz. Zollen	Wassermenge pr. Secunde in Cubikzollen	Mittlere Geschwindigkeit $= v$, in franz. Zollen
I. Abwässerungsgraben von Courpalet *)						
(1)	$\frac{1}{28168}$	—	920,43	86,554	—	3,465
II. Künstlicher trapezförmiger Canal **)						
(2) *A*	$\frac{1}{212}$	2,166	18,84	13,06	518,4	27,51
(3) *B*		4,666	50,60	29,50	1463,4	28,92
(4) *C*	$\frac{1}{412}$	6,000	83,43	26,00	2264,4	27,14
(5) *D*		2,833	27,20	15,31	497,2	18,28
(6) *E*	$\frac{1}{427}$	3,666	39,36	18,13	799,2	20,30
(7) *F*		4,333	50,44	20,37	1128,6	22,37
(8) *G*		4,666	56,43	21,50	1328,4	23,54
(9) *H*	$\frac{1}{432}$	6,750	100,74	28,53	2872,8	28,52
(10) *I*		7,500	119,58	31,06	3607,2	30,16
(11) *K*		7,917	130,71	32,47	4168,8	31,89
(12) *L*		8,083	135,32	33,03	4401,0	32,52
(13) *M*	$\frac{1}{1728}$	2,333	20,83	13,62	186,3	8,94
(14) *N*		3,333	34,37	17,00	334,0	9,71
(15) *O*		3,833	42,01	18,69	518,4	12,34

*) Die betreffenden Dimensionen sind bei Girard in Metern angegeben, und zwar $l = 31389^m,724$, $h = 1^m,1144$, $a = 0^{\square m},67449$, $p = 2^m,343057$ und $v = 0^m,0938$. Bei der Reduction wurde angenommen: 1 Meter = 3,0784 pariser Fuß = 36,941 pariser Zoll.

**) Principes, Nr. 377.

Bezeichnung oder Nummer des Versuches	Relatives Gefälle $= \frac{h}{l}$	Wassertiefe in franz. Zollen	Canalquerschnitt $= a$, in franz. Quadratzollen	Wasserperimeter $= p$, in franz. Zollen	Wassermenge pr. Secunde in Cubikzollen	Mittlere Geschwindigkeit $= v$, in franz. Zollen
		III. Künstlicher rectangulärer Canal				
(16) *P*	$\frac{1}{458}$	2,000	34,50	21,25	698,4	20,24
(17) *Q*		5,000	86,25	27,25	2440,4	28,29
(18) *R*	$\frac{1}{929}$	2,000	34,50	21,25	468,0	13,56
(19) *S*		2,042	35,22	21,33	324,0	9,19
(20) *T*		3,000	51,75	23,25	626,2	12,10
(21) *V*	$\frac{1}{1412}$	4,416	76,19	26,08	1080,2	14,17
(22) *X*		5,957	102,78	29,17	1598,4	15,55
(23) *Y*	$\frac{1}{9288}$	4,000	69,00	25,25	316,8	4,59
(24) *Z*		9,000	155,25	35,25	885,6	5,70
		IV. Canal du Jard (1440 Fuß lang)				
(25) 177	$\frac{1}{27648}$	—	6125,0	324,0	—	7,27
(26) 178	$\frac{1}{21827}$	—	7858,0	340,0	—	9,61
(27) 179	$\frac{1}{27648}$	—	7376,0	337,0	—	7,79
(28) 180	$\frac{1}{15360}$	—	10475,0	360,0	—	15,74
		V. Haine-Fluß				
(29) 181	$\frac{1}{32951}$	—	30905,0	568,0	—	13,61
(30) 182	$\frac{1}{6048}$	—	31498,0	569,0	—	35,11
(31) 183	$\frac{1}{35728}$	—	39639,0	604,0	—	15,96

Anmerkung 3. Nach Prony hielt man es zuerst für eine ganz besondere Aufgabe, den bereits gewonnenen mathematischen Ausdruck dadurch zu einem noch treueren Darsteller der betreffenden Naturerscheinung zu machen, daß man eine immer größere Zahl von Beobachtungen zur Bestimmung der Coefficienten *A* und *B* benutzte, merkwürdiger Weise aber dabei ganz davon absah, ob sie allen zu machenden Anforderungen, allermeist denen einer gleichförmigen Bewegung entsprachen oder nicht. So nahm zuerst Eytelwein *) sämmtliche 36 an künstlichen Canälen angestellten Versuchsresultate (wie solche Bd. 1 der Principes, p. 76, aufgeführt sind **) und bestimmte daraus den Coefficienten *k* der Chezy'schen Formel, nach einer ähnlichen Methode wie Prony, wonach er für preußische Fuße seine in der deutschen Wasserbaupraxis berühmt gewordene Formel erhielt:

*) Handbuch der Mechanik fester Körper, zweite Auflage, S. 160.

**) Prony hatte von diesen Versuchen Nr. 97, 100 und 105 als wenig sicher, Nr. 116 und 117, wegen der Wasserpflanzen im Jardcanale, und Nr. 125 im Haineflusse deshalb weggelassen, weil bei diesem Versuche ein starker Wind geweht hatte.

$$v = 90{,}9 \sqrt{\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p}}.\ ^{*)}$$

Später, in einer Abhandlung der Königlichen Academie der Wissenschaften in Berlin, aus den Jahren 1814—1815, S. 167 der mathematischen Classe, behandelt Eytelwein den ganzen Gegenstand noch ausführlicher, kommt aber dabei auf den Prony'schen Ausdruck I, §. 120, zurück und ermittelt die Coefficienten A und B aus überhaupt 91 Versuchen (36 von Dubuat, 16 von Brünings, 4 von Woltmann und 35 von Funk) ohne freilich die Frage der Brauchbarkeit des einen oder andern dieser Versuche, für die gleichförmige Bewegung des Wassers, streng zu erwägen. Die Gleichung II, §. 120, wird hiernach, für Metermaß, zu:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}0000243 \cdot v + 0{,}000366 \cdot v^2.$$

§. 121.

Von allen Arbeiten, die seit Prony über die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen oder Flüssen geliefert wurden, sind keine von so großer Bedeutsamkeit, wie die des Geh. Oberbaurath Hagen, welcher zuerst (1837 in seinen Grundzügen der Wahrscheinlichkeitsrechnung), sämmtliche bis dahin bekannt gewordenen Formeln einer ausführlichen Kritik unterwarf, ihren Werth gehörig erwog und vor Allem zum ersten Male, die einzig richtige Bestimmungsweise der fraglichen Coefficienten mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate in Anwendung brachte.

Hagen verwirft zuerst sämmtliche Beobachtungen von Funk und Brünings, behält von Dubuat nur 7 bei, welche am Jard-Canale und Haine-Flusse angestellt wurden, legt aber den vier von Woltmann unternommenen Versuchen einen doppelten Werth bei, und findet sodann: **)

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p} = 0{,}00005783 \cdot v + 0{,}00006844 \cdot v^2 \text{ für Preuß. Fuße,}$$

woraus folgt:

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p} = 0{,}00005783 \cdot v + 0{,}00021806 \cdot v^2 \text{ für Meter,}$$

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p} = 0{,}00005783 \cdot v + 0{,}00006360 \cdot v^2 \text{ für hannov. Fuß etc.}$$

---

*) $v = 50{,}9 \sqrt{\frac{h}{l} \frac{a}{p}}$ für Meter,

$v = 94{,}2 \sqrt{\frac{h}{l} \frac{a}{p}}$ für hannov. Fuß.

**) Wahrscheinlichkeits-Rechnung, Seite 143.

Zu bedauern ist, daß sich gegründete Bedenken gegen die Richtigkeit der von Woltmann angegebenen mittleren Geschwindigkeiten erheben lassen *), auch Woltmann selbst gesteht, daß beim Ritzebüttler Canale hin und wieder Schilf und Rohr im Wasser vorhanden war. Aus diesen Gründen ziehen wir in der Folge die Prony'sche Formel der Hagen'schen vor.

Anmerkung 1. Die bemerkten 7 Versuche Dubuat's sind in der Anmerkung 2 des vorigen Paragraphen die vier Nr. 177 bis 180 am Jard-Canale, 182 und 183 die am Haine-Flusse angestellten, wozu noch Nr. 184 desselben Flusses kommt, letzterer Versuch fehlt in der Tabelle Seite 301 und wird hier mit den vier Woltman'schen Versuchen zusammengestellt.

Nr. des Versuches	Wassertiefe	a	p	l	h	$\frac{h}{l}$	v	Bemerkungen
I. Dubuat's Versuch im Haine-Flusse angestellt.								
184		38838,0□''	601''	1106'	24,83'''	0,000155	31,77''	franz. Maße
II. Woltman's Versuche an einem Entwässerungsgraben bei Cuxhafen. **)								
1	10,6''	7,064□'	10,0'	1000'	$2\frac{5}{8}$''	0,0002188	1,116'	hamb. Maße ***)
2	16,6''	11,982□'	11,0'	1000'	$2\frac{1}{2}$''	0,0002083	1,50'	
III. Woltman's Versuche an einem Entwässerungsgraben bei Ritzebüttel.								
3	$23\frac{1}{4}$''	27,10□'	16,8'	1000'	1,03''	0,00008584	0,98'	hamb. Maße
4	$29\frac{1}{4}$''	34,2 □'	18,1'	1000'	0,80''	0,00006667	0,98'	

Die an der Oberfläche gemessenen Geschwindigkeiten des Jard-Canales und Haine-Flusses hat Hagen nach der Eytelwein'schen Formel $v = V(1 - 0{,}004 \,.\, t)$ auf die mittlere reducirt und dabei $t = \frac{a}{p}$ genommen.

---

*) Förster's Bauzeitung 1852, Seite 151.

**) Beiträge zur Baukunst schiffbarer Canäle. Göttingen 1802, Seite 286.

Die größten Geschwindigkeiten, woraus Woltman v ableitete, waren beziehungsweise 1,35 Fuß, 1,8 Fuß, 1,3 Fuß und abermals 1,3 Fuß.

***) 1 Hamburger Fuß = 0,286572 Meter.

Beispiel. *) Es soll die Breite eines Entwässerungscanales bestimmt werden, der bei $1\frac{1}{2}$facher Anlage ($1\frac{1}{2}$füßiger Dossirung) der Seitenwände, bei einem Gefälle von 1 Fuß auf 23333 Fuß Länge (hannoversche Maße), ferner bei einer mittleren Wassertiefe von 6 Fuß, die constante Wassermenge von 300 Cubikfuß pr. Secunde fortführt. Wie groß ist die Sohlbreite zu nehmen?

Auflösung. Wir benutzen hierzu die Prony'sche Formel III, §. 120, nämlich:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}00004445 \,.\, v + 0{,}000090336 \,.\, v^2,$$

setzen die unbekannte Sohlbreite $= x$ und erhalten:

$$v = \frac{Q}{a} = \frac{300}{6(x+9)} = \frac{50}{x+9};\ p = x + 2\sqrt{117} = x + 21{,}6331;$$

schreiben ferner vorerst z statt $x + 9$, so wie endlich:

$$\frac{6z}{z+12{,}63331} \cdot \frac{1}{23333} = 0{,}00004445 \,.\left(\frac{50}{z}\right) + 0{,}000090336\left(\frac{50}{z}\right)^2,$$

oder $\dfrac{6z^3}{z+12{,}63331} = 51{,}8575925 \,.\, z + 5269{,}52472$, oder auch

$$z^3 - 8{,}6429321 \,.\, z^2 - 987{,}44296 \,.\, z - 11095{,}25656 = 0.$$

Die für uns brauchbare Wurzel dieser Gleichung ist: $z = 40{,}13$ Fuß, also $x = 31{,}13$ Fuß. **)

Hagen's Formel liefert: $z = 37{,}27$ Fuß und $x = 28{,}27$ Fuß.

§. 122.

Die Chezy-Eytelwein'sche Formel $v = k\sqrt{\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p}}$ durch ihre Einfachheit für den praktischen Gebrauch höchst empfehlenswerth, wird bis zur vollständigeren Entscheidung der überhaupt schwebenden Frage, jedenfalls für Praktiker beizubehalten,

---

*) Es ist dies Beispiel absichtlich Förster's Bauzeitung, Jahrg. 1852, S. 152 entlehnt und wird abermals nachher §. 125 und §. 127, also noch zwei Mal, eine Lösung finden.

**) Mit Hülfe einer neueren Formel von St. Venant:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}0001210 \,.\, v^{\frac{21}{11}}$$

für hannoversche Fuße, ergiebt sich $x = 31{,}49$ Fuß. St. Venant hat den betreffenden Coefficienten aus den von Eytelwein benutzten 91 Versuchen berechnet und findet für Metermaß:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}00040102 \,.\, v^{\frac{21}{11}}$$

Annales des Mines, 4e Série, T. XX, p. 183.

dabei aber die Forderung zu stellen sein, daß sie mindestens nicht ungenauere Werthe als die zweigliedrige Formel liefert, dem auch sofort entsprochen wird, wenn man k aus der Gleichung $\frac{v^2}{k^2} = Av + Bv^2$ berechnet, also für k setzt:

$$k = \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{v} + B}},$$

wonach also k mit der Geschwindigkeit veränderlich ist.

Bei Benutzung der Prony'schen Zahlenwerthe für A und B berechnet sich k wie nachstehend:

1. Für Meter.

v	$0^m,1$	$0^m,2$	$0^m,3$	$0^m,4$	$0^m,5$	$0^m,75$	$1^m,0$	$1^m,25$	$1^m,5$	$2^m,0$
k	36,42	43,37	46,75	48,77	50,11	52,09	53,17	53,85	54,32	54,92

2. Für hannoversche Fuß.

v	0',5	0',8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0
k	74,69	82,79	86,13	91,40	94,26	96,17	97,52	98,51	99,28	100,39	101,15

Anmerkung. In jüngster Zeit hat Dupuit *) die ganze bisherige mathematische Auffassung der Bewegung des Wassers in Canälen einer höchst strengen, meistentheils sehr richtigen Kritik unterworfen. Bis auf Weiteres (d. h. bis nach Anstellung neuerer und brauchbarer Versuche), räth Dupuit, die mittlere Geschwindigkeit v dadurch zu bestimmen, daß man zuerst die Bodengeschwindigkeit w mittelst der Formel berechnet:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = aw + bw^2 = 0{,}00081 \,.\, w + 0{,}00036 \,.\, w^2 \; {}^{**)} \text{ für Meter,}$$

sodann aber zur Bestimmung von v die Gleichung zu benutzen:

$$v = w + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p} \cdot t,$$

wenn t die mittlere Tiefe des Querschnittes bezeichnet, ε aber ein Erfahrungscoefficient ist, den Dupuit nach Sonnet $= \frac{1}{3200}$ setzt, zugleich aber bemerkt, daß er ihn für zu gering hält.

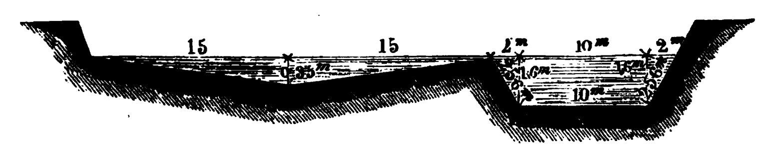
*) Etudes etc., p. 50.

**) Prony's Formel für die Bewegung des Wassers in Röhren, mit etwas vergrößerten Coefficienten.

§. 123.

Bilden sich, durch die Form der Profile veranlaßt, bei der Bewegung des Wassers in regelmäßigen Betten, zwei oder mehrere verschiedene Stromstriche, wie dies z. B. bei Fig. 151 und

Fig. 151.



überhaupt der Fall ist, wenn die Wassertiefen und beziehungsweise die Geschwindigkeiten sehr verschieden auftreten; so hat man die betreffenden Rechnungen so zu führen, als wären zwei oder mehrere ganz verschiedene Profile vorhanden, d. h. die Gesammtaufgabe in eben so viel einzelne Fälle zu zerlegen.

Beispiel. Es ist die Wassermenge zu berechnen, welche pr. Secunde durch das Profil von Fig. 151 fließt, wobei $\frac{h}{l} = 0{,}0005$ bekannt ist und die in der Figur eingeschriebenen Maße gegeben sind.

Auflösung. Für das Trapezprofil von $1^m{,}6$ Tiefe ist

$$a = \frac{1{,}6}{2}(14 + 10) = 0{,}8 \,.\, 24 = 19^{\square m}{,}2$$

$$p = 2{,}50 + 10{,}00 + 2{,}56 = 15{,}06,$$

daher wegen

$$v = -\,0{,}07185 + \sqrt{0{,}005163 + 3233{,}43\,\frac{ah}{pl}}$$

aus der Prony'schen Formel: $v = -\,0{,}07185 + 1{,}43122$, d. i.

$$v = 1^m{,}36, \text{ so wie}$$
$$Q = 26{,}112 \text{ Cub. Meter.}$$

Für das (beinah) Dreieck-Profil ist

$$a_1 = 15 \,.\, 0{,}35 = 5^{\square m}{,}25;\quad p_1 = 30{,}1,$$

woraus sich berechnet, wenn auch hier $\frac{h}{l} = 0{,}0005$ genommen wird:

$$v_1 = 0^m{,}5136 \text{ und}$$
$$Q_1 = 2{,}696 \text{ Cub. Meter.}$$

Für die ganze Wassermasse erhält man also:

$$Q + Q_1 = 26{,}112 + 2{,}696 = 28{,}552 \text{ Cub. Meter.}$$

§. 124.

Entwässerungen.

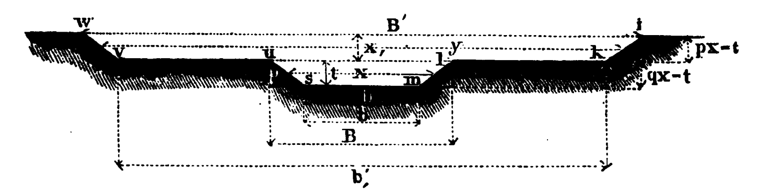
Um den praktischen Gebrauch der bereits gewonnenen Formeln zu zeigen, folgt hier eine Reihe entsprechender Aufgaben, wobei jedoch abermals nicht genug hervorgehoben werden kann, daß die daran geknüpften Zahlenbeispiele, der Natur der ganzen Sache zufolge, nur als entfernte Anhaltspunkte betrachtet werden dürfen.

Wir beginnen mit der Beantwortung von Fragen, welche sich auf Entwässerungen beziehen, entweder für den Fall, daß diese durch plötzliche Anschwellungen, zufolge Regengüssen etc., oder die mehr regelmäßigen atmosphärischen Niederschläge während längerer Zeiten, Monate etc., oder aus sonstigen Ursachen, nothwendig werden.

Unter Voraussetzung plötzlicher Anschwellungen ist es in vielen Fällen angemessen, beim Projectiren des auszuhebenden Canales, von Vornherein zwei verschiedene Profile zu bilden, wovon das eine für den gewöhnlichen (normalen) Wasserstand, das andere für die Anschwellungen bestimmt ist.

Allgemein beachtungswerth ist hierbei ein von Prony bei Gelegenheit seiner Arbeit über die Pontinischen Sümpfe *) angegebenes und mehrfach angewandtes Profil, was Fig. 152 darstellt

Fig. 152.



und wobei die Ufer überall eine $1\frac{1}{2}$fache Anlage besitzen (d. h. es verhält sich $\overline{rs} : \overline{ru} = 3 : 2$ etc.)

Dabei bezeichne ferner x die mittlere Breite des unteren Profiles, $y = nx$ die des oberen Profiles, $t = qx$ die Tiefe des

---

*) Description hydrographique et historique des marais pontins. Paris 1822, pag. 54 etc.

unteren und $t_1 = px$ die Tiefe des oberen Profiles. Setzt man außerdem $\overline{sm} = b$, $ul = B$, $vk = b'$, $\overline{wi} = B'$ und nimmt mit Prony $n = 3\frac{1}{2}$, $q = p = \frac{1}{6}$, so erhält man:

$$t = t_1 = \frac{x}{6},$$

$$a = \frac{t}{2}(B + b) = t \,.\, x = \frac{x^2}{6},$$

$$a_1 = \frac{t_1}{2}(B' + b') = t' \,.\, y = nqx^2 = \frac{3{,}5}{6} \,.\, x^2 = 0{,}583 \quad x^2$$

$$\overline{rs} = \frac{x}{4}$$

$$b = 0{,}75 \,.\, x$$

$$B = 1{,}25 \,.\, x$$

$$b_1 = 3{,}25 \,.\, x$$

$$B_1 = 3{,}75 \,.\, x, \text{ so wie } \overline{us} = lm \,.\,.\, = \frac{x}{24}\sqrt{52}.$$

Hiernach ergiebt sich als Totalprofilfläche

$$A = a + a_1 = 0{,}75 \,.\, x^2,$$

und als Totalwasserperimeter

$$P = b + 2\overline{uv} + 4\overline{us} = 2{,}75\, x + 1{,}2016\, x, \text{ oder}$$

$$P = 3{,}9516 \,.\, x.$$

Bezeichnet man endlich das relative Gefälle $\frac{h}{l}$ mit J, die Wassermenge pr. Secunde mit Q, so liefert Prony's Formel die Gleichung:

$$\frac{0{,}75 \,.\, x^2}{3{,}9516\, x} \,.\, J = 0{,}00004445 \frac{Q}{0{,}75 \,.\, x^2} + 0{,}0003091 \left(\frac{Q}{0{,}75 \,.\, x^2}\right)^2,$$

oder

$$\text{I.} \quad x^5 - 0{,}000312283 \frac{Q}{J} \,.\, x - 0{,}00289745 \frac{Q^2}{J} = 0.$$

Ein Annäherungswerth x_1 berechnet sich hierbei mittelst der Gleichung:

$$\text{II.} \quad x_1 = 0{,}310744 \sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}}$$

Beispiel. Welche Dimensionen hat man einem Abwässerungscanale zu geben, der, bei 0,0005187 relativen Gefälle, regelmäßig pr. Secunde $q = 4{,}1$ Cubikmeter Wasser abzuführen hat, zugleich aber auch der bekannten höchsten Anschwellung,

aus dem betreffenden Flußgebiete von 1 □Meile Größe, Genüge leisten muß? Beobachtet wurde als Maximum ein Niederschlag (Regenguß) von 6 Centimeter Höhe in 30 Stunden, eine Zeit, die auch hinreichen soll, sämmtliches Wasser zu entfernen.

Auflösung. Nimmt man an, daß $\frac{1}{3}$ des plötzlich niedergefallenen Wassers in den Erdboden zieht (was natürlich nach boden- und climatisehen Verhältnissen in jedem Falle verschieden sein wird), rechnet eine Quadratmeile gleich 55044634,8 Quadratmeter*) und beachtet, daß 30 Stunden = 108000 Secunden sind, so ist pr. Secunde eine zufällige Wassermenge = q_1 abzuführen:

$$q_1 = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{55044634{,}8}{108000} \cdot 0{,}06 = 20{,}4 \text{ Cub. Meter.}$$

Die überhaupt in Rechnung zu bringende Wassermenge = Q beträgt folglich

$$Q = q + q_1 = 4{,}6 + 20{,}4 = 25{,}0 \text{ Cubikmeter.}$$

Die angegebene Näherungsformel (II) liefert daher ohne Weiteres

$$x_1 = 0{,}310744 \sqrt[5]{\frac{625}{0{,}0005187}} = 5^m{,}111,$$

so wie I:

$$x^5 - 15{,}05 \cdot x^2 - 3491{,}24 = 0,$$

und hieraus folgt:

$$x = 5{,}227 \text{ Meter.}$$

Weiter berechnet sich sodann:

$$b = 0{,}75 \cdot x = \tfrac{3}{4} \cdot 5{,}227 = 3^m{,}92$$
$$B = 1{,}25 \cdot x = 6^m{,}531$$
$$b_1 = 3{,}25 \cdot x = 16^m{,}987$$
$$B_1 = 3{,}75 \cdot x = 19^m{,}601$$
$$\overline{uv} = 5^m{,}227$$
$$t + t_1 = 1^m{,}742$$
$$A = a + a_1 = 20^{\square m}{,}4907$$
$$v = \frac{Q}{A} = 1^m{,}22.$$

---

*) 1 □Meile (hannov.) = 5504,46348 Hektaren (à 10000 □Meter) = 21001,3 hannov. Morgen.
1 hannov. Morgen = 30720 hannov. Quadratfuß,
1 Hektare = 3,815 hannov. Morgen (à 120 □Ruthen).

§. 125.

Wasserpflanzen in Entwässerungscanälen.

In vielen Fällen ist es rathsam, bei der Berechnung der Dimensionen von Entwässerungsgräben, von vorn herein auf die Möglichkeit der Erzeugung von Wasserpflanzen Rücksicht zu nehmen, indem durch dieselben der Wasserabfluß gestört, also ein stärkeres Gefälle nothwendig wird, sobald dieselbe Wassermassermasse unverändert abgeführt werden soll. *)

Versuchen Dubuat's entsprechend **) hat d'Aubuisson ***) für diesen Fall die Formel entwickelt:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}00036554 \, . \, m \, (v^2 + 0{,}0664 \, v),$$

oder genau genug:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}00037 \, . \, mv^2,$$

wobei Metermaß vorausgesetzt, m aber ein Coefficient ist, der sich auf die mehr oder weniger große Menge der vorauszusetzenden Wasserpflanzen bezieht und, nach dem gedachten Hydrauliker, im Mittel = 2 gesetzt werden kann.

Sodann folgt aus der zweiten Formel:

Für Meter: $\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}000740.v^2$ od. $v = 36{,}76 \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}}$,

Für Hannov. Fuß: $\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}000125.v^2$ od. $v = 68{,}19 \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}}$,

Für Preuß. Fuß: $\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}000232.v^2$ od. $v = 65{,}65 \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}}$.

Anmerkung 1. Hagen (Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 141) findet die Coefficienten k der Formel $v = k \sqrt{\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l}}$, welche den gedachten Dubuat'schen Versuchen, Nr. 175 und Nr. 176, entsprechen, beziehungsweise zu 74,92 und 66,5 (für preußische Fuße), was als eine, unter den bewandten Umständen, genügende Uebereinstimmung mit den d'Aubuisson'schen Annahmen, zu betrachten ist.

---

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß nur von solchen Fällen die Rede sein kann, wo trotz der zeitweisen Reinigung der Gräben, Wasserpflanzen schwer oder gar nicht für immer zu entfernen sind.

**) Nr. 175 und Nr. 176 der Versuche, Principes, Tome II, p. 102.

***) Annales des Ponts et Chaussées 1841, 2, pag. 255.

Anmerkung 2. Bei der Angabe von Canaldimensionen, wobei das abzuführende Wasserquantum aus der Menge atmosphärischer Niederschläge (Regen, Schnee, Hagel) annähernd berechnet werden muß, hat man vor Allem das Stromgebiet eines Flusses mit Hülfe guter Charten zu ermitteln *) und sodann aus entsprechenden Beobachtungsresultaten über Niederschläge und Verdunstung in dem betreffenden Terrain, die übrig gebliebene, also abzuführende Wassermenge zu berechnen. In den meisten Fällen kann man letztere zu $\frac{1}{8}$ des gesammten Niederschlages in Anschlag bringen. In Marschgegenden und eingedeichten Niederungen ist überdies auf das zuweilen über die Deiche laufende Wasserquantum, so wie besonders auf das aus dem Boden und den Bedeichungen hervordringende Qualm oder Kuverwasser Rücksicht zu nehmen.

So rechnet Blohm **) beispielsweise für die Elbmarschen, im Mittel, die ganze Niederschlagshöhe vom 1. Januar bis zum letzten April 10,2 Pariser Zoll, oder 11,34 Hannoversche Zoll. Hiervon ab, für gleichen Zeitraum und für dieselbe Gegend 5,20 Zoll für Verdunstung des Wassers. Dazu wieder an Kuverwasser 5,86 Zoll, so daß sich die zu entfernende Wasserdecke berechnet zu:

+	11,34	Zoll Niederschlag
—	5,20	Zoll Verdunstung
+	6,14	
+	5,86	Kuverwasser
	12,00	Zoll.

Wir lassen hier Beobachtungsresultate über Niederschläge (Regenmengen) und Verdunstungen folgen, welche insbesondere für die hannoverschen Flußgebiete, Elbe, Weser und Ems von Nutzen und Interesse sein werden. ***)

---

*) Weitere Auskunft hierüber giebt unter Anderen Bornemann in seiner „Hydrometrie", Freiberg 1849, S. 167. Ferner Sganzin: Programme etc., edit. par Reibell. Pl. 18, Fig. 111, Text p. 202, Vol. I.

**) Ueber die Abwässerung der Marschen durch Dampfkraft, von dem Ingenieur Glynn. Deutsch herausgegeben vom Wasserbaudirector Blohm. Hamburg 1846, Seite 34 etc.

***) Auch ist zu bemerken, daß sich diese Resultate in der sonst reichhaltigen Sammlung Hagen's (Wasserbaukunst, Erster Theil, 2. Auflage, Seite 13 und 18) nicht vorfinden.

(Tabelle I.)

Uebersicht

der monatlichen Regenhöhen zu Harburg in den Jahren 1840 bis 1855 incl., vom Wasserbau-Director Blohm beobachtet.

	Monatliche Höhen in Pariser Zollen. (1 Pariser Fuß = 1,11210 Hannov. Fuß.)												
	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Summa im Jahre
1840	3,3150	0,7100	0,7250	0,1500	2,6387	2,6525	3,9100	1,9250	3,0550	2,5350	2,0225	0,2575	23,8962
1841	1,3375	0,1150	0,8750	0,9600	1,3700	4,5800	5,6475	1,9700	2,1950	5,2675	2,6100	2,8185	29,745
1842	0,2300	0,6575	2,6525	1,0050	0.8450	3,6650	2,5850	0,4900	2,6525	1,2850	1.2675	1,5275	18,8625
1843	2,5975	1,8375	0,3200	2,9675	3,4700	3,8350	2,9125	1,6425	1,3250	4,6650	1,9400	0,8775	26,390
1844	1,6250	1,5125	2,3975	0,5375	2,9625	1,6475	3,5875	5,0225	1,1100	3,2875	2,0800	0,3200	26,090
1845	0,6050	0,2100	1,5250	1,0375	3,7450	2,2475	3,2200	3,7375	1,6725	2,4620	2,2750	3,5600	26,2975
1846	2,9975	1,6500	1,4400	4,1150	1,5125	2,0525	2,2725	0,6100	0,7700	2,1700	0,8000	0,4200	20,810
1847	0,2400	0,6000	—	1,9400	2,6600	2,2500	0,6600	0,5600	2,6100	2,9500	1,0700	1,1500	16,690
1848	0,0900	2,9400	1,5600	2,0500	fehlt	4,7500	2,4100	4,7500	2,3600	1,6900	2,3800	1,2200	26,200 ohne Mai
1849	2,2400	1,1600	1,5875	1,3100	2,8250	2,4700	2,0200	2,1100	1,1400	2,5900	0,5100	0,8400	20,8025
1850	0,5400	1,4500	—	1,5000	1,2600	1,0700	2,6500	1,3500	2,3000	2,1500	1,2000	0,9800	16,4500
1851	1,2700	0,7500	2,9300	2,2700	1,2000	2,6600	1,8400	1,9300	1,2000	1,4000	2,8400	0,3100	20,6000
1852	2,9800	2,7700	0,7500	0,7100	2,2000	3,2500	1,8200	1,2900	4,0200	3,3600	3,0400	5,2400	28,4300
1853	2,0000	1,5800	1,1000	1,6100	1,2600	5,5700	2,7800	1,1600	1,7100	2,2000	0,7700	0,3600	22,1300
1854	1,6600	2,3100	0,6200	0,7900	3,5600	1,5300	1,5200	2,3400	2,2600	2,4500	2,0700	5,0600	26,1500
1855	1,1800	1,0700	1,0600	0,9000	3,4200	2,6600	3,7300	2,5500	0,4600	2,5400	1,1800	1,9400	22,6900
	Mittlere Regenmenge von 1840 — 1855 incl.												
	1,5504	1,3333	1,2207	1,4905	2,1829	2,9806	2,7228	2,0773	1,9250	2,5504	1,7365	1,5073	23,6400
Maxim.	3,3150	2,9400	2,9300	4,1150	3,7450	5,5700	5,6475	5,0225	4,0200	5,2675	3,0900	5,0601	29,7150

(Tabelle II.)

Uebersicht

der monatlichen Niederschlagshöhen zu Bremen, während der Jahre 1840 — 1855 incl. beobachtet von Dr. Heinecken daselbst.

Monatliche Höhen in Bremer Zollen und Linien. (1 Bremer Fuß = 0,990606 Hannov. Fuß.)

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Summa im Jahre
1840	2″ 11‴	0″ 6‴	1″ 1‴	0″ 3‴	3″ 8‴	1″ 7½‴	3″ 0‴	2″ 6‴	1″ 6‴	3″ 6‴	2″ 4‴	0″ 2‴	23″ ½‴
1841	3″ 2‴	0″ 11‴	0″ 5‴	1″ 0‴	1″ 1‴	6″ 6‴	4″ 5‴	2″ 9‴	1″ 0‴	5″ 8‴	4″ 2‴	3″ 0‴	34″ 1‴
1842	1″ 2‴	0″ 10‴	3″ 10‴	0″ 5‴	1″ 7‴	3″ 11‴	3″ 9‴	0″ 3½‴	2″ 0‴	1″ 8‴	1″ 3‴	2″ 4‴	20″ 7½‴
1843	2″ 5‴	2″ 7‴	0″ 2‴	3″ 5‴	4″ 3‴	3″ 3‴	4″ 6‴	3″ 5‴	2″ 2″	4″ 0‴	2″ 1‴	1″ 0‴	33″ 3‴
1844	4″ 3‴	3″ 0‴	3″ 4‴	0″ 5‴	1″ 10‴	1″ 11‴	2″ 5‴	4″ 8‴	1″ 10‴	2″ 5‴	2″ 9‴	0″ 3‴	29″ 1‴
1845	0″ 11‴	0″ 9‴	1″ 9‴	0″ 10‴	3″ 0‴	1″ 1‴	5″ 7‴	2″ 3‴	1″ 4‴	3″ 4‴	4″ 9‴	6″ 10‴	30″ 5‴
1846	5″ 1‴	1″ 9‴	1″ 11‴	3″ 7‴	0″ 9‴	1″ 4‴	3″ 5‴	0″ 8‴	0″ 2‴	1″ 8‴	0″ 4‴	1″ 5‴	22″ 1‴
1847	0″ 5‴	2″ 0‴	0″ 6‴	2″ 2‴	2″ 11‴	2″ 6‴	1″ 5‴	0″ 1‴	4″ 4‴	3″ 10‴	1″ 8‴	0″ 8‴	22″ 4‴
1848	0″ 1‴	3″ 7‴	2″ 5‴	2″ 9‴	0″ 2‴	5″ 2‴	2″ 6‴	5″ 10‴	3″ 11‴	3″ 0‴	2″ 10‴	1″ 5‴	33″ 8‴
1849	3″ 4‴	1″ 6‴	2″ 1‴	1″ 3½‴	3″ 2‴	2″ 3‴	3″ 7‴	0″ 9½‴	2″ 0‴	4″ 2‴	1″ 8‴	2″ 10‴	28″ 8‴
1850	0″ 9‴	2″ 11‴	1″ 6‴	3″ 2‴	3″ 10‴	1″ 2‴	2″ 10‴	4″ 6‴	2″ 1½‴	2″ 0‴	3″ 8‴	2″ 0‴	30″ 5‴
1851	2″ 6‴	1″ 5‴	4″ 5‴	2″ 1‴	1″ 6‴	3″ 5‴	3″ 8‴	3″ 3‴	3″ 5‴	2″ 6‴	2″ 11‴	0″ 4‴	31″ 11‴
1852	4″ 6‴	4″ 0‴	0″ 5‴	0″ 6‴	2″ 6‴	2″ 6‴	1″ 0‴	1″ 3‴	2″ 3‴	2″ 3‴	2″ 4‴	2″ 9‴	26″ 3‴
1853	2″ 3‴	2″ 1‴	1″ 3‴	2″ 3‴	2″ 2‴	3″ 7‴	3″ 9‴	1″ 10‴	0″ 11‴	1″ 7‴	0″ 4‴	0″ 3‴	22″ 4‴
1854	0′ 8‴	1″ 6‴	0″ 3‴	0″ 4‴	4″ 1‴	2″ 6‴	0″ 6½‴	4″ 5‴	1″ 7‴	2″ 2‴	2″ 4‴	6″ 6‴	26″ 10½‴
1855	1″ 6‴	3″ 0‴	1″ 4‴	1″ 1‴	4″ 6‴	5″ 11‴	5″ 3‴	2″ 9‴	1″ 2‴	2″ 1‴	0″ 5‴	0″ 6‴	29″ 6‴

Die umfänglichsten Beobachtungen über Niederschlag und Verdunstung sind wohl die auf Zwanenburg in den Jahren 1743 bis 1841 angestellten, welche man vollständig für jeden Monat in den Nieuwe Verhandelingen van het Bataafsch Genootschap IX, 1. Stuck, findet und wovon hier Tab. III. die Mittelwerthe der fast hundertjährigen Beobachtungen enthält.

(Tabelle III.)

Die Maße sind Millimeter. (24,33 Millimeter = 1 Zoll Hannov.)													
	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Summa im Jahre
Niederschlag in Millimeter	37,82	37,10	36,21	37,71	39,61	53,04	68,36	75,41	71,68	78,63	70,17	51,47	657,21
Verdunstung in Millimeter	8,28	14,49	34,79	60,60	82,91	94,92	94,89	82,47	54,89	51,59	17,92	13,32	591,07
Niederschlag weniger Verdunst.	+29,54	+22,61	+ 1,42	−22,89	−43,30	−41,88	−26,53	− 7,06	+16,79	+47,04	+52,25	+38,15	+ 66,14

Beispiel 1. Es sind die Dimensionen eines Abwässerungsgrabens zu bestimmen, mittelst welchem eine Niederung von einer hannoverschen Quadratmeile Ausdehnung entwässert werden soll. Maßgebend ist dabei, daß eine 6 Zoll hohe Wasserdecke binnen 30 Tagen abgeführt werden muß.

Auflösung. Die bezeichnete Fläche berechnet sich zu $21001{,}3 \times 30720$ Quadratfuß Hannov., und da auf 30 Tage die Zahl $30 . 24 . 3600 = 2592000$ Secunden kommt, die pr. Secunde zu entfernende Wassermasse zu

$$\frac{21001{,}3 \times 30720 \times \frac{1}{2}}{2592000} = 124{,}4 \text{ Cubikfuß.}$$

Giebt man den Grabenufern eine $1\frac{1}{2}$fache Anlage, setzt die mittlere Breite des trapezförmigen Profiles $= x$, wählt ferner $t = \frac{x}{6}$ als Wassertiefe und $\frac{h}{l} = \frac{1}{6000}$, so kann man für gegenwärtigen Fall genau genug annehmen:

$$p = x + 2t = \tfrac{4}{3}x;\; a = \frac{x^2}{6};\; \frac{a}{p} = \frac{x}{8},$$

weshalb man mit Zuziehung von §. 125 erhält:

$$\frac{x}{8} \cdot \frac{1}{6000} = 0{,}000215 \left(\frac{124{,}4}{\frac{1}{6}x^2}\right)^2, \text{ d. i.}$$

$$x = \sqrt[5]{48 \, . \, 0{,}215\,(746{,}2)^2} \text{ und ferner}$$

$$x = 22{,}48 \text{ Fuß.}$$

Weiter ergiebt sich die Sohlbreite $b = 16{,}86$ Fuß, die Breite B im Wasserspiegel $= 16',86$, die Wassertiefe $t = 3{,}746$ Fuß, der Profilquerschnitt $a = 84{,}225$ Quadratfuß, so wie endlich die mittlere Geschwindigkeit zu $v = 1{,}47$ Fuß.

Beispiel 2. Es ist unter der Voraussetzung des zeitweisen Vorhandenseins von Wasserpflanzen die Sohlbreite $= x$ des bereits §. 121 berechneten Entwässerungsgrabens nochmals zu bestimmen. Dabei war $\frac{h}{l} = \frac{1}{23333}$, $t = 6{,}0$ Fuß, $Q = 300$ Cubikfuß pr. Secunde und die Anlage der Grabenufer eine $1\frac{1}{2}$fache.

Auflösung. Man erhält zuerst $a = 6\,(x + 9)$, $v = \frac{50}{x+9}$, $p = x + 2\sqrt{117} = x + 21{,}64$, sodann aber:

$$\frac{6\,(x+9)}{x+21{,}64} \cdot \frac{1}{23333} = 0{,}000125 \left[\frac{50}{x+9}\right]^2,$$

und wenn wiederum $x + 9 = z$ gesetzt wird,

$$\frac{6z^3}{(z + 12{,}63631)} = 0{,}000125\,(50)^2 \, . \, 23333, \text{ d. i.}$$

$$z^3 - 2090{,}248 \, . \, z - 26406{,}75 = 0.$$

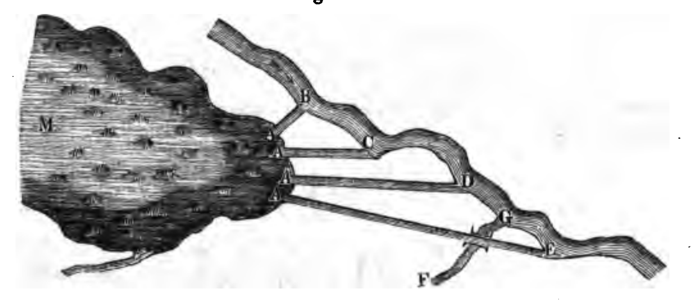
Hieraus findet man $z = 51{,}6$, also die Sohlbreite $= x = 42{,}6$ Fuß.

[§. 126.]

Dubuat's Entwässerungsaufgabe.

Es sei AM, Fig. 153, ein trocken zu legendes Terrain, welches in seinem gegenwärtigen Zustande sein Wasser durch einen kurzen

Fig. 153.



Canal *AB* einem Flusse *BCDE* zuführt und wobei eine gehörig frühe und vollständige Entwässerung der Fläche *M* durch Selbstabfluß niemals möglich ist, weil zu keiner Zeit das Wasser im Flusse *BE* niedrig genug steht.

Um nun sowohl die Bodenfläche *AM* für landwirthschaftliche Zwecke nutzbar machen zu können, als auch schädliche Ausdünstungen zu vermeiden, beabsichtigt man, einen anderen Canal *AC* oder *AD*, oder selbst *AE* auszuheben. Ein solcher Canal soll erstens das fragliche Terrain völlig trocken legen, was geschehen wird, sobald sich der Canal so weit längs des Flusses erstreckt, bis ein Punkt erreicht ist, woselbst die Oberfläche des höchsten Wasserstandes im Flusse noch unter dem Terrainboden liegt; zweitens soll aber auch das dabei auszuhebende Erdquantum das kleinstmöglichste, die Herstellung also die wohlfeilste sein, natürlich in letzterem Falle vorausgesetzt, daß nicht zu erbauende Brücken, wie wenn z. B. *FG* überschritten werden muß, oder andere Terrain- oder Besitzverhältnisse (theuere Ländereien) dazwischen treten.

Zur Auflösung der betreffenden Aufgabe werde vorausgesetzt, daß, ziemlich genau, die Canallänge $\overline{AC}$ gleich der Flußlänge *BC*, eben so *AD* gleich *BD* u. s. w. ist. Ferner bezeichne x die mittlere Breite und y die Länge des Canales, t den Wasserstand in letzterem über dem Boden des trocken zu legenden Terrains *AM* gemessen, r die Tiefe dieses Bodens unter der Oberfläche des Flusses *BE*.

Bezeichnet man ferner mit η das absolute und mit $\frac{1}{\varepsilon}$ das relative Gefälle des Flusses, so ist $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\eta}{y}$, oder $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$. Das absolute Gefälle des Canales muß also werden $\frac{y}{\varepsilon} - r$, so wie endlich das relative desselben

$$(1)\quad \frac{\frac{y}{\varepsilon} - r}{y} = \frac{y - \varepsilon r}{\varepsilon y}.$$

Außerdem erhält man nach den vorstehenden Bezeichnungen

$$\frac{\text{Profilfläche}}{\text{Wasserperimeter}} = \frac{a}{p} = \frac{x \cdot t}{x + 2t},$$

so wie, wenn Q die pr. Secunde abzuführende Wassermenge bezeichnet, wegen

$$v = \frac{Q}{a} = k\sqrt{\frac{a}{p}\,\frac{h}{l}}$$

$$(2)\quad \frac{Q}{xt} = k\sqrt{\frac{x \cdot t}{x + 2t} \cdot \frac{y - \varepsilon r}{\varepsilon y}}.$$

Zu dieser Gleichung kommt noch die Bedingung, daß man die geringstmögliche Erdmasse auszuheben wünscht, also

$$xyt = \text{Minimum, oder}$$

$$(3) \quad xdy + ydx = 0.$$

Aus (2) erhält man

$$y = \frac{r\varepsilon k^2 t^3 . x^3}{k^2 t^3 x^3 - \varepsilon Q^2 (2t + x)},$$

oder wenn man $r\varepsilon t^3 k^2 = \alpha$, $k^2 t^3 = \beta$ und $\varepsilon Q^2 = \gamma$ setzt:

$$y = \frac{\alpha x^3}{\beta x^3 - \gamma(2t + x)},$$

so wie hieraus durch Differenziation:

$$(4) \quad dy = \frac{3\alpha x^2 dx [\beta x^3 - \gamma(2t + x)] - \alpha x^3 [3\beta x^2 dx - \gamma dx]}{[\beta x^3 - \gamma(2t + x)]^2}.$$

Jetzt (3) und (4) in (1) substituirt, reducirt und für α, β, γ wieder die ursprünglichen Werthe eingeführt, giebt:

$$0 = \frac{t^3}{\varepsilon}\left(\frac{k}{Q}\right)^2 x^3 - 3x - 8t \text{ *), oder}$$

$$\text{I.} \quad 0 = x^3 - \frac{3\varepsilon Q^2}{k^2 t^3} x - \frac{8\varepsilon Q^2}{k^2 t^2}.$$

Beispiel. Die zu entwässernde Fläche AM habe eine Ausdehnung von 9284,075 hannov. Morgen. Regen und Zufluß der Quellen erzeugen darauf eine Wasserdecke von $1\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{8}$ Fuß $= 0,125$ Fuß Dicke. Das relative Gefälle des Flusses BE sei $\frac{1}{8800}$ und der Boden von AM liege 3,336 Fuß tiefer als die höchste Anschwellung des Flusses, endlich werde eine Tiefe des Abwässerungscanales von 6,672 Fuß vorausgesetzt.

Wie hat man die Dimensionen des Canales zu wählen, damit die vorhandene Wassermasse in einem Tage = 86400 Secunden abgeführt und der Canal so wohlfeil wie möglich wird?

Auflösung. Es sind 9284,075 Morgen $= 9284,075 \times 30720^{\square'} = 285206784^{\square'}$ hannov. Dieser Fläche entspricht, bei $1\frac{1}{2}$ Zoll Höhe $=$ 0,125 Fuß, eine Wassermenge von 35650848 Cubikfuß, so daß die pr. Secunde zu entfernende Wassermenge $= Q$ beträgt:

$$Q = \frac{35650848}{86400} = 412{,}62 \text{ Cubikfuß.}$$

Nimmt man sodann, nach §. 125, $k = 68$, so folgt aus I:

$$0 = x^3 - 1338{,}87 . x - 23821{,}0 \text{ und hieraus:}$$

$$x = 43{,}44 \text{ Fuß.}$$

*) Principes, Tome I, p. 282.

Ferner folgt

$$v = \frac{Q}{x \cdot t} = \frac{412,62}{43,44 \,.\, 6,672} = 1,427 \text{ Fuß},$$

$$\frac{h}{l} = \frac{v^2}{k^2} \frac{p}{a} = \frac{(1,427)^2}{68^2} \cdot \frac{56,784}{43,44 . 6,672} = 0,00000858 \text{ und}$$

$$h = 1,493.$$

Zur Probe kann man auch das relative Gefälle des Canales aus (1) berechnen, wodurch man erhält:

$$\frac{h}{l} = \frac{\frac{y}{\varepsilon} - r}{y} = \frac{\frac{17383,9}{3600} - 3,336}{17383,9} = \frac{4,82886 - 3,336}{17383,9} = 0,00000858$$

wie vorher.

Anmerkung. Um ein Urtheil über die Geschwindigkeitsveränderungen bei Anschwellungen, oder verschiedenen Wasserständen t und t_1 in demselben Canale abzugeben, setzt man sehr oft $t = \frac{a}{p}$, $t_1 = \frac{a_1}{p_1}$ und findet mittels der Chezy-Eytelwein'schen Formel, beziehungsweise

$$v = k\sqrt{t\frac{h}{l}} \text{ und } v_1 = k_1\sqrt{t_1\frac{h_1}{l}},$$

nimmt ohne Weiteres $h = h_1$ an, d. h. setzt voraus, daß sich bei verschiedenen Wasserständen die Gefälle nicht ändern, und schreibt

$$\frac{v}{v_1} = \frac{k_1}{k}\sqrt{\frac{t}{t_1}},$$

oder auch genau genug ($k_1 = k$)

$$(1) \quad \frac{v}{v_1} = \sqrt{\frac{t}{t_1}}.$$

Eben so setzt man beziehungsweise $Q = av = kbt\sqrt{t\frac{h}{l}}$ und $Q_1 = a_1 v_1 = k_1 b t_1 \sqrt{t_1 \frac{h}{l}}$ und findet:

$$(2) \quad \frac{Q}{Q_1} = \frac{t\sqrt{t}}{t_1\sqrt{t_1}} \text{ oder } \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{t}{t_1}.$$

Lahmeyer (Förster Bauzeitung, Jahrg. 1852, S. 153) empfiehlt statt (1):

$$(3) \quad \frac{v}{v_1} = \sqrt[3]{\frac{t^2}{t_1^2}}.$$

Daß derartige Formeln in den meisten Fällen noch weniger als entfernte Annäherungsausdrücke sind, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Durchaus unerwiesen ist vor Allem die Annahme $h = h_1$. *)

§. 127.

Vortheilhafteste Canalprofile.

Aus der einfachen Betrachtung irgend einer der bis jetzt für die Bewegung des Wassers in Canälen aufgestellten Formeln, ergiebt sich sofort, daß der Widerstand des Bettes, unter sonst gleichen Umständen, zu einem Minimum wird, sobald man Profile wählt, welche beim größten Flächeninhalte den kleinsten Wasserperimeter besitzen. Fänden sich daher nicht praktische Hindernisse in der Ausführung, so müßten das vielseitige Polygon und der Halbkreis die vor Allem zu empfehlenden Profile abgeben. Da dies jedoch überall da nicht der Fall sein kann, wo der Canal im Erdboden unter Voraussetzung einer bestimmten Anlage auszuheben ist, so hat man die ganze Frage (vom mathematischen Standpunkte aus) nach der Lehre von den Eminenzien der Funktionen zu beantworten.

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen und Einführung eines Böschungswinkels $= \beta$, ist

$$a = \frac{t}{2}(B + b); \quad (1)\ p = b + \frac{2t}{\sin\beta},$$

oder weil $B = b + 2t \,.\, \text{cotg.}\, \beta$ ist, ergiebt sich auch

$$a = t\,(b + t\,\text{cotg.}\,\beta), \text{ so wie}$$

$$(2)\quad \frac{a}{t} = b + t\,\text{cotg.}\,\beta \text{ und}$$

$$(3)\quad \frac{a}{t^2} = \frac{b}{t} + \text{cotg.}\,\beta.$$

Ferner erhält man aus der Verbindung von (1) und (2)

$$p = \frac{a}{t} - t\,\text{cotg.}\,\beta + \frac{2t}{\sin\beta}.$$

In Bezug auf t, als unabhängige Variable, wird dieser Ausdruck ein Minimum für

$$(4)\quad \frac{a}{t^2} = \frac{2}{\sin\beta} - \text{cotg.}\,\beta = \frac{2}{\sin\beta} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta},$$

*) Hagen: Wasserbaukunst, 2. Theil, Bd. 1, S. 187.

d. i. für

$$\text{I.} \quad t = \sqrt{\frac{a \sin\beta}{2 - \cos\beta}}.$$

Aus der Verbindung von (3) mit (4) folgt noch:

$$\frac{b}{t} + \text{cotg.}\,\beta = \frac{2}{\sin\beta} - \text{cotg.}\,\beta, \quad \text{d. giebt:}$$

$$\text{II.} \quad \frac{b}{t} = 2\, tg\, \tfrac{1}{2}\,\beta.$$

Endlich giebt noch (3):

$$\text{III.} \quad t = \sqrt{\frac{a}{\frac{b}{t} + \cos\beta}}.$$

Für $\beta = 90^{\circ}$, d. h. wenn die Canalwände senkrecht auf dem Boden stehend angeordnet werden können, ist endlich nach II.

$$\text{IV.} \quad b = 2t.$$

Zusatz. In vielen praktischen Fällen kann man ein Canalprofil nicht nach vorstehenden mathematischen Regeln abmessen. Zuweilen ist, wegen der Terrainverhältnisse, die Anlage eines breiteren Canales wohlfeiler als die eines engeren *), oft folgt man auch dem Satze, daß je größer die fortzuleitende Wassermasse ist, um so breiter müsse der Canal im Verhältniß zur Tiefe werden. Aus letzterem Grunde nimmt z. B. Redtenbacher**) für Fabrikcanäle, welche große Aufschlagwassermengen zuführen, das Verhältniß $\frac{b}{t}$ nicht constant, sondern läßt es mit der Größe des Querschnittes wachsen. Für Metermaß setzt derselbe:

$$\frac{b}{t} = 2{,}7 + 0{,}9\,.\,a$$

und führt die betreffenden Dimensionsberechnungen mit dieser Gleichung und der vorher unter III. entwickelten aus.

Oft ist aber auch eine Vergrößerung der Canalbreite von großem Nachtheil, z. B. wenn die Aushebung desselben in gutem, culturfähigen Boden geschehen muß. In einem solchen Falle wäre es vortheilhafter, die Tiefe zu vergrößern, weil damit zugleich der Vortheil des geringeren Pflanzenwuchses gewonnen würde. Canäle mit großer Wassertiefe empfehlen sich in kalten

---

*) Hagen: Wasserbaukunst, II. Theil, 3. Bd., S. 522.
**) Resultate für den Maschinenbau. 3. Auflage, S. 125.

Gegenden auch zur Fortleitung des Aufschlagwassers für Wasserräder, weil sodann die Eisbildungen von geringerem Nachtheile sind.

Bei in Erde ausgehobenen Canälen für letzgenannte Zwecke (Fabrikcanäle), nimmt man in der Regel eine Wassergeschwindigkeit $v = 0^m,4$ bis $0^m,8$ an, sorgt jedoch dabei, daß die Querschnitte nicht zu groß werden, was die Wahl innerhalb der bemerkten Grenzen bestimmt, zuweilen aber auch Veranlassung werden kann, daß man sie überschreitet, d. h. die Geschwindigkeit größer nimmt.

Beispiel 1. Es ist nach den mathematischen Regeln das vortheilhafteste Profil eines Canales unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß derselbe pr. Secunde eine Wassermenge von 2 Cubikmeter fortleiten, ein relatives Gefälle 0,0012 besitzen und den Ufern eine $1\frac{3}{4}$fache Anlage gegeben werden soll?

Auflösung. Die Forderung einer $1\frac{3}{4}$fachen Anlage liefert sofort: cotg. $\beta = 1,75$, d. i. $\beta = 29^0 45'$, also $\frac{1}{2}\beta = 14^0 52' 30''$ und tg. $\frac{1}{2}\beta = 0,2656$, daher nach II:

$$\frac{b}{t} = 2 \,.\, 0,2656 \text{ und}$$

$$b = 0,5312 \,.\, t,$$

so wie ferner folgt:

$$B = 4,0312 \,.\, t$$

$$a = 2,2812 \,.\, t^2 \text{ und}$$

$$\frac{a}{p} = 0,5\, t.$$

Mit diesen Werthen giebt Prony's Formel II, Seite 297:

$$0,0012 \,.\, \frac{t}{2} = 0,00004445\left(\frac{Q}{2,2812\, t^2}\right) + 0,00030931\left(\frac{Q}{2,2812\, t^2}\right)^2$$

oder da $Q = 2,0$ ist, nach gehöriger Reduction:

$$0 = t^5 - 0,06494 \,.\, t^2 - 0,3962.$$

Einen ersten Annäherungswerth erhält man, indem man setzt:

$$t = \sqrt[5]{0,3962} = 0^m,831.$$

Ferneres Rechnen liefert, genau genug:

$$t = 0^m,85, \text{ also}$$

$$b = 0^m,4515$$

$$B = 3^m,426.$$

D'Aubuisson (Traité d'Hydraulique, p. 138) findet für denselben Fall $t = 0^m,869$ und $b = 0^m,462$. Jedoch hält derselbe für

rathsam, für die Ausführung vorzuschlagen: $t = 1^m,2$ und $B = 4^m,662$, dagegen $b = 0^m,462$ beizubehalten.

Mit Zuziehung der Redtenbacher'schen Erfahrungs-Formel, hätte man, unter Annahme einer mittleren Geschwindigkeit von $v = 0^m,6$, erhalten:

$$Q = \frac{2}{0,6} = 3,33 \ \square\text{Meter},$$

folglich:

$$\frac{b}{t} = 2,7 + 0,9 \cdot \frac{10}{3} = 5,70$$

und aus III:

$$t = \sqrt{\frac{3,33}{5,70 + 1,75}} = \sqrt{\frac{333}{745}} = 0^m,668,$$

daher

$$b = 5,7 \cdot 0,668 = 3^m,81.$$

Beispiel 2. Welche Dimensionen würde der bereits §. 121 und §. 125 (Beispiel 2) berechnete Abwässerungscanal mit Zuziehung der Redtenbacher'schen Erfahrungs-Formel $\frac{b}{t} = 2,7 + 0,9 \cdot a$ erhalten?

Auflösung. Es sind $Q = 300$ Cubikfuß Hannov. $=$ 7,47 Cub. Meter. Nimmt man die mittlere Geschwindigkeit zu $v = 0^m,5$ an, so folgt zunächst

$$a = \frac{Q}{v} = \frac{7,47}{0,5} = 14^{\square m},94,$$

sodann $\frac{b}{t} = 2,7 + 0,9 \cdot 14,94 = 16,146$ und, wegen $\text{cotg.}\,\beta = \frac{3}{2}$, ferner

$$t = \sqrt{\frac{14,94}{16,136 + \frac{3}{2}}} = 0^m,9201 = 3,15 \text{ Fuß Hannov.},$$

also $b = 16,146 \cdot t = 14^m,856 = 50,867$ Fuß Hannov.

Jedenfalls dürfte dem im §. 125, Beispiel 2, berechneten Werthe von $b = 42,6$ Fuß der Vorzug zu geben und der Canal hiernach auszuführen sein.

[§. 128.]

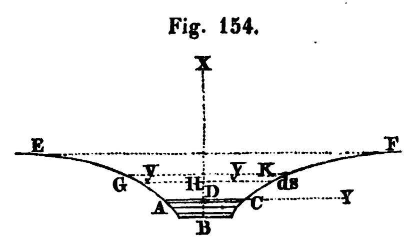
Anschwellungsprofil mit gleichbleibender mittlerer Geschwindigkeit.

Als ein mindestens nicht uninteressanter Gegenstand mag hier noch die Aufgabe Platz finden, wie man das Querprofil eines Canales

einzurichten haben würde, wenn bei vorkommenden Anschwellungen, also zunehmenden Wassertiefen (Peilhöhen), die mittleren Geschwindigkeiten stets dieselben blieben und damit Nachtheile für Schifffahrt und Haltbarkeit der Ufer, vermieden werden sollten.

Hierzu sei *ABCD*, Fig. 154, das für den gewöhnlichen normalen Wasserabfluß hinreichende Profil, dagegen *EGADCJF* das zu ermittelnde.

Fig. 154.



Zu letzterem Zwecke wählen wir *D* als den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes (*DX* als Abscissenaxe vertical u. *DY* als Ordinatenaxe horizontal) und setzen für einen Punkt *K* der Begrenzungscurve x, $DH = x$ und $HK = y$, das betreffende Längenelement des Bogens $CF = ds$, so wie endlich $DC = DA = b$.

Die Hauptbedingung der Auflösung folgt ohne Weiteres aus der Formel $v = k\sqrt{\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p}}$, indem man setzt:

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{a}{p} = \text{Const.},$$

oder unter der Annahme, daß $\frac{h}{l}$ auch constant ist (?) und mit Beachtung der gewählten Bezeichnungen:

$$\frac{a}{p} = \frac{2ydx}{2ds} = c,$$

wobei c stets aus dem normalen Profile *ABCD* zu ermitteln ist.

Aus letzterer Gleichung findet sich, indem man $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$dx = \frac{c \cdot dy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

so wie hieraus:

$$x = c \, lgnt\,(y + \sqrt{y^2 - c^2}) + A.$$

Zur Bestimmung von A beachte man, daß $y = b$ wird, wenn man $x =$ Null setzt, daher das bestimmte Integral giebt:

$$x = c \left\{ lgnt\,(y + \sqrt{y^2 - c^2}) - lgnt\,(b + \sqrt{b^2 - c^2}) \right\}.$$

Woltmann*), der nach unserem Wissen gegenwärtige Aufgabe zuerst löste, bezweifelt selbst unter allen Umständen die Vortheile derartiger Profile, wenn sie auch sonst streng praktisch ausführbar wären, weil der seichten Ufer wegen der Schifffahrt eher Nachtheile wie Vortheile gebracht werden könnten, auch eine größere mittlere

---

*) Beiträge zur Schiffbarmachung der Canäle, S. 60 etc.

Geschwindigkeit die für die Schifffahrt verlorne Anschwellungszeit möglichst verkürzen, die dabei nothwendige große Terrainfläche zu beiden Seiten des Hauptstromstriches noch gar nicht zu gedenken. Ganz anders gestaltet sich indeß die Frage in Fällen, wo leicht angreifbare (sandige) Ufer von großen Geschwindigkeiten weggerissen werden können oder es der Schifffahrt bei trockenen Jahreszeiten an Wasser mangelt. Unter solchen Umständen beklagt Woltmann nun, daß die Curven des Ueberschwemmungsprofiles schwer auszuführen wären, und glaubt schließlich, daß polygonale Profile (wie das von Prony Fig. 152 vorgeschlagene) beinah dieselben Dienste thun würden.

Beispiel. Der normale Wasserstrom habe im Spiegel eine Breite $\overline{AC} = 2\overline{AD} = 2\overline{DC} = 26 = 20$ Fuß, seine mittlere Tiefe betrage 4,2 Fuß sein benetzter Umfang 21 Fuß, so daß der Profilquerschnitt $a = 20 \times 4{,}2 = 84$ □Fuß und $\frac{a}{p} = c = \frac{84}{21} = 4$ gesetzt werden kann.

Aus der allgemeinen Gleichung folgt sonach:

$$x = 4 \left\{ lgnt(y + \sqrt{y^2 - 16}) - lgnt(10 + \sqrt{100 - 16}) \right\}, \text{ d. i.}$$

$$x = 4\, lgnt(y + \sqrt{y^2 - 16}) - 14{,}713, \text{ oder genau genug:}$$

$$x = 4\, lgnt.\, 2y - 14{,}713.$$

Für y nach einander 30, 60, 120, 200 . . . gesetzt, giebt beziehungsweise x zu 1,64, 4,34, 7,21, 9,25 etc.

§. 129.

Durchstiche.

Canäle oder Gräben, deren Axen in Krümmungen liegen, sind oft in völlig geradlinige Strombetten umzuändern, d. h. Durchstiche zu bilden. Hierdurch wird das Angreifen der Ufer vermindert und nachtheiligen Ablagerungen vorgebeugt, besonders aber das relative Gefälle vergrößert und eine Senkung des Wasserspiegels erzeugt, welche namentlich für Entwässerungen von bedeutendem Nutzen sein kann.

Zur Beurtheilung des Erfolges eines derartigen Durchstiches und Berechnung der vorbemerkten Größen, läßt sich, unter Voraussetzung, daß der ursprüngliche Canal oder Graben nur Krümmungen von großen Halbmessern und dabei sanfte Uebergänge besitzt, bei abermaligem Mangel eines besseren, die Chezy-Eytelwein'sche Formel benutzen. *)

*) Wir benutzen die Gelegenheit, folgendes Werk zum Nachlesen zu empfehlen, dem auch das Zahlenbeispiel dieses Paragraphen entlehnt ist: Blohm (Wasserbaudirector) „Versuch einer näheren Erörterung der Mittel, durch welche der Handelsverkehr in den Elbgegenden erhalten und gehoben werden kann.“ Göttingen 1841, Seite 70.

Da die Wassermengen der gekrümmten und geraden Strecke gleichbleibend anzunehmen sind, so erhält man ohne Weiteres:

$$ka\sqrt{\frac{a}{p}\cdot\frac{h}{l}} = k_1a_1\sqrt{\frac{a_1}{p_1}\cdot\frac{h}{l_1}},$$

wo sich die mit dem Index versehenen Buchstaben auf den Durchstich beziehen.

Annäherungsweise und für Canäle und Gräben, wobei die (als gleichbleibend anzunehmenden) Breiten b die mittleren Tiefen t und t_1 sehr bedeutend übertroffen, ergiebt sich aus dieser Gleichung (da selbstverständlich $h = h_1$ ist):

$$bt\sqrt{\frac{bt}{b+2t}\cdot\frac{1}{l}} = bt_1\sqrt{\frac{bt_1}{b+2t_1}\cdot\frac{1}{l_1}}, \text{ und}$$

$$\text{I.}\quad t_1 = t\sqrt[3]{\frac{b+2t_1}{b+2t}\cdot\frac{l_1}{l}}.$$

Als einen Annäherungsausdruck, indem nahe genug $b + 2t_1 = b + 2t$ vorausgesetzt wird, kann man hierbei benutzen:

$$\text{II.}\quad t_1 = t\sqrt[3]{\frac{l_1}{l}}.$$

Beispiel. Bei dem (Hannoverschen) Flusse Ilmenau und zwar für die Abtheilung von Lüneburg bis zur Netze, beträgt die Normalbreite 61 Fuß, die Länge im Fahrstriche gemessen 55340 Hannov. Fuß, das absolute Gefälle auf diese Länge 12,427 Fuß, die geringste mittlere Wassertiefe 28 Zoll = 2,33 Fuß, es fragt sich, welche Senkung der Wasserspiegel erfährt, wenn man die bemerkte Längenstrecke mittelst eines geradlinigen Durchstiches auf 44200 Fuß herabbringt?

Auflösung. Zuerst liefert II:

$$t_1 = 28\sqrt[3]{\frac{44200}{55400}} = 25{,}969 \text{ Zoll} = 2{,}164 \text{ Fuß},$$

$$t_1 = 28\sqrt[3]{\left(\frac{61+2.2{,}164}{61+2.2{,}33}\cdot\frac{44200}{55400}\right)} = 25{,}94 \text{ Zoll.}$$

Hiernach beträgt die Senkung höchstens 2,1 Zoll, das relative Gefälle ist aber gewachsen von $\frac{1}{4453}$ auf $\frac{1}{3556}$.

Zusatz. Der Einfluß, welchen die Krümmungen, der sonst regelmäßigen Betten, auf die Bewegung des Wassers ausüben, ist im Vorstehenden deshalb vernachlässigt worden, weil er

unter den gemachten Voraussetzungen in der That äußerst gering ist. [1])

Dubuat [2]) räth den Widerstand der Stromkrümmungen genau wie bei Wasserleitungsröhren zu berechnen, d. h. er setzt den Gefällverlust $= \eta$ (auf Metermaß reducirt):

$$\eta = 0{,}0123 \, . \, v^2 \, . \, \Sigma (\sin \delta)^2,$$

wobei $\Sigma \sin \delta$ die Summe der Sinus aller vorhandenen Einfall- oder Anprall-Winkel darstellt, aber auch vorauszusetzen ist, daß $\delta < 36$ Grad.

Lahmeyer [3]) bestimmt den Einfluß der Krümmungen dadurch, daß er dem Weisbach-Bornemann'schen Ausdrucke für die Bewegung des Wassers in Canälen [4]), nämlich

$$\frac{a}{p} \, . \, \frac{h}{l} \, . \, \frac{1}{v^2} = \frac{A'}{\sqrt{v}} \text{ oder } \frac{a}{p} \, . \, \frac{h}{l} \, . \, \frac{1}{v\sqrt{v}} = A'$$

ein besonderes Glied, nämlich $B' \sqrt{\frac{b}{\varrho}}$ beifügt, also überhaupt setzt:

$$\frac{a}{p} \, . \, \frac{h}{l} \, \frac{1}{v\sqrt{v}} = A' + B' \sqrt{\frac{b}{\varrho}},$$

wobei A' und B' Erfahrungscoefficienten sind, b die Canalbreite (Flußbreite) und ϱ den Halbmesser der betreffenden Krümmung bezeichnet.

---

1) Nach Blohm (a. a. O., S. 73) hat schon Galiläi (in den Lettera di Galileo Galilei sopra il fiume Bisenzio a Rafaello Staccoli. Da Bellosguarda li 16. Gennajo 1630) über diesen Gegenstand Folgendes ausgesprochen: „Was die Krümmungen und Biegungen des Canals anlangt, so bin ich nicht abgeneigt, zuzugeben, daß die aus geradlinigten Winkeln gebildeten und vorzüglich, wenn sie spitz oder rechtwinklig, oder beinah rechtwinklig sind, den Lauf des Wassers beträchtlich und auch merkbar verzögern können. Wenn aber die Winkel stumpf sind und selbst wenn sie von geraden Linien eingeschlossen werden, so glaube ich, daß die Verzögerung nur gering sei. Wenn aber der Fluß, wie man zu sagen pflegt, sich schlängelt und seine Biegungen einen Bogen bilden, so hege ich entschieden die Ansicht, daß der Aufenthalt des Wassers dann ganz unmerkbar ist."

2) Principes, Nr. 103.

3) Förster's Bauz. 1852, S. 153.

4) Hülße polytechn. Centralblatt 1845, S. 308, und besonders Bornemann etc. „Der Ingenieur", Bd. 1, S. 38.

Lahmeyer berechnet diese Coefficienten aus 616 eigenen und anderen Versuchen und findet:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{v\sqrt{v}} = 0,0004021 + 0,0002881 \sqrt{\frac{b}{\varrho}} \text{ für Meter,}$$

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{1}{v\sqrt{v}} = 0,0002173 + 0,0001557 \sqrt{\frac{b}{\varrho}} \text{ für hannov. Fuß.}$$

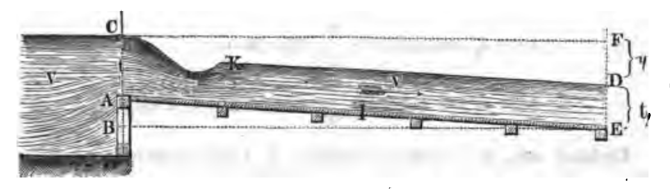
§. 130.

Eintritt und Austritt des Wassers bei Canälen.

Die meisten Canäle, in welchen sich Wasser mit merkbarer Geschwindigkeit bewegt, namentlich die zur Leitung des Aufschlagwassers für Motoren bestimmten, werden entweder direct durch Flüsse gespeist, oder sie empfangen ihr Wasser aus Sammelbehältern (Teichen, Anspannungen etc.), die mit ersteren in Verbindung stehen oder durch selbständige Zuflüsse aus Bächen oder Quellen versorgt werden.

Die Eintrittsstelle des Wassers in den Canal, die sogenannte Spitze desselben, ist dabei entweder frei, wie Fig. 155 zeigt, oder sie ist mit Schützvorrichtungen (Fig. 91 und Fig. 101) versehen. Beide Fälle lassen verschiedene Erscheinungen erkennen und sind daher bei gegenwärtiger Betrachtung zu trennen.

Fig. 155.



Befindet sich an der Spitze AC des Canales keine Schützanordnung, so senkt sich der Wasserspiegel nahe der Eintrittsstelle recht merklich, erhebt sich aber bald wieder und gelangt endlich nach einigen ferneren Schwankungen in denjenigen Zustand der Gleichförmigkeit, wobei der Wasserspiegel glatt und eben und dem Canalboden parallel ist.*)

Vom wissenschaftlichen Standpunkte betrachtet entbehren die hier auftretenden Erscheinungen noch jeder mathematischen

*) Fälle, wobei der Oberwasserspiegel auch im Beharrungszustande dem Canalboden nicht parallel ist, gehören in das nächstfolgende Capitel.

Darstellung, während man sich für practische Zwecke mit einigen von Dubuat gewonnenen Beobachtungsresultaten begnügen muß. *)

Hinsichtlich des Ausführlichen hierüber auf unsere Quelle verweisend, machen wir zunächst von folgendem Satze Gebrauch **):

„in einem Canale von constanter Breite und durchaus gleichem Gefälle stellen sich Querschnitte und mittlere Geschwindigkeit in der Weise her, daß die der Geschwindigkeit entsprechende Höhe gleich der Differenz ist, zwischen dem Wasserstande im Speisebehälter und im Canale, erstere über der Einlaßschwelle A, letztere stromabwärts an einer Stelle gemessen, woselbst die gleichförmige Bewegung vollständig eingetreten ist."

Bezeichnet man hiernach die Tiefe AC mit t, die ED mit t_1, mit m aber einen Erfahrungs- (Contractions-) Coefficienten, und drückt endlich durch V die Geschwindigkeit aus, womit sich das Wasser an der Canalspitze ersetzt, so ergiebt sich die Gleichung

$$t - t_1 = \frac{1}{2g} \frac{v^2}{m^2} - \frac{V^2}{2g},$$

oder wenn V klein genug:

$$\text{I.} \quad t - t_1 = \frac{1}{2g} \frac{v^2}{m^2}, \text{ d. i.}$$

$$t - t_1 = 0{,}0510 \frac{v^2}{m^2} \text{ für Meter,}$$

$$t - t_1 = 0{,}0149 \frac{v^2}{m^2} \text{ für hannov. Fuß.}$$

Dubuat sah, bei seinem bereits §. 120, Anmerkung 2, aufgeführten Versuchen, die Größe m wechseln von 0,91 bis 0,73, ist dabei jedoch der Ansicht, daß in großen Canälen, mit verhältnißmäßig geringeren Geschwindigkeiten, die Contraction unbedeutender ist und $m = 0{,}97$ gesetzt werden kann. Eytelwein ***) nimmt für breite Canäle $m = 0{,}95$ und für schmale $m = 0{,}86$.

Ueberdies glaubt Dubuat, daß man durch gehörige Abrundungen und schickliche Erweiterungen (Seite 240) den betreffenden Verlust beim Eingange fast ganz zu Null machen könne, was abgesehen von practischen Schwierigkeiten in der Ausfüh-

*) Principes, Nr. 170.

**) Ebendaselbst, Nr. 178.

***) Handbuch der Mechanik und Hydraulik, 2. Auflage, Seite 115.

rung nicht so ganz der Fall ist, weil der Verlust einfach schon wegen des nothwendigen Ueberganges von einer kleinen Geschwindigkeit (V) in eine größere (v) völlig unvermeidlich ist. Der Nutzen der gedachten Abrundungen und Erweiterungen, wenn sie sich überhaupt ausführen lassen, soll dabei durchaus nicht in Zweifel gezogen werden.

In Bezug auf die Gleichung I. ist noch zu bemerken, daß sie eigentlich voraussetzt, daß beim Eintritte die Ablenkungsrichtung nun einen spitzen Winkel bildet, weil bei größeren und namentlich rechten Winkeln der Wassereinfluß in derartigen krummen Linien geschieht, daß das Querprofil des Wasserkörpers kleiner als das des Canales wird, Stöße, wirbelnde Bewegungen u. s. w. erzeugt werden, über welche Erscheinungen es noch gänzlich an Betrachtungen fehle.

Zur Lösung betreffender practischer Aufgaben sind noch einige Formeln erforderlich, die hier abgeleitet werden sollen.

Es sei CF die verlängerte Horizontale der Wasserfläche bei C, η die Höhendifferenz DF zwischen dem Spiegel im Behälter und dem bei E, dessen Entfernung $\overline{AE} = l$ sein mag, so wie e das absolute Gefälle des Spiegels kD der Canalwasseroberfläche ausdrücken soll, wobei in Bezug auf die Figur $\overline{AB} = e$ sein wird, sobald BE eine Horizontale ist.

Es sei deshalb CF die verlängerte Horizontale des Oberwasserspiegels im Behälter, $\overline{FD} = \eta$ die Höhendifferenz zwischen gedachtem Spiegel und der Wasseroberfläche im Canale bei D, während die Canallänge $EA = l$ und das absolute Gefälle der Wasseroberfläche Dk, d. i, $AB \doteq e$ gesetzt werden mag, wobei $BE \parallel CF$ angenommen ist.

Sodann folgt ohne Weiteres, wegen $\overline{CB} = EF$:

$$\frac{t + e = t_1 + \eta}{e = \eta - (t - t_1)}$$

und das relative Canalgefälle:

$$\text{II.} \quad \frac{e}{l} = \frac{\eta - (t - t_1)}{l}.$$

Verbindet man endlich letzteren Werth mit §. 120, so findet sich überdies:

$$\frac{\eta - (t - t_1)}{l} = \frac{p}{a}(Av + Bv^2)$$

und wenn man hierin den Werth für $t - t_1$ aus I. substituirt:

$$\text{III.} \quad \eta = \frac{v^2}{m^2 . 2g} + \frac{p}{a}(Av + Bv^2).$$

In welcher Weise mit Hülfe der Ausdrücke I., II. und III. vorkommende practische Aufgaben gelöst werden, erhellt aus nachfolgendem Beispiele, was wir d'Aubuisson *) entlehnten.

Beispiel. Aus einem Flußbassin (eine Anspannung) wird ein Quantum Wasser unter der Bedingung gekauft, daß dasselbe durch einen rechtwinkligen, 4 Meter breiten Ausschnitte in der Damkappe, dessen Schwelle 2 Meter unter dem tiefsten Wasserstande des Flusses angeordnet ist, abgeleitet werde. Das gekaufte Wasser soll nach einer 265 Meter entfernten Stelle zum Wasserradbetriebe und zwar in der Weise fortgeführt werden, daß der Wasserspiegel nahe der Aufschlagstelle nicht mehr als $0^m,44$ unter dem Niveau des Sammelbehälters beim kleinsten Wasser desselben liegt.

Welche Wassermenge wird hiernach ein mit dem Ausschnitte verbundener rechtwinkliger Canal fortzuführen haben, welches Gefälle wird derselbe besitzen müssen und wie groß wird die Wassertiefe am Ende des Canales sein?

Auflösung. Nach den gegebenen Zahlenwerthen ist annäherungsweise $a = 4 . 2 = 8^{\square m}$ und eben so $p = 4 + 2 . 2 = 8^m$ zu nehmen. Wählt man überdies (mit d'Aubuisson) $m = 0,905$, so folgt aus der dritten Gleichung, wenn der Coefficient A vernachlässigt und $B = 0,00030931$ (§. 120) gesetzt wird:

$$0,44 = \frac{0,051 . v^2}{(0,905)^2} + \tfrac{8}{8} . 265 . 0,00030931 . v^2, \text{ d. i.}$$

$$v = 1^m,7 \text{ approxim.}$$

Ferner erhält man hiernach aus der ersten Gleichung:

$$t_1 = 2,00 - 0,06224 . v^2$$

$$t_1 = 2,00 - 0,18 = 1^m,82 .$$

Nunmehr ergiebt sich weiter:

$$a = 4 \ . \ 1,82 = 7,28$$

$$p = 4 + 3,64 = 7,64$$

und nach §. 122 $\frac{v^2}{k^2}$ statt $Av + Bv^2$ gesetzt, also $\frac{v^2}{k^2} = \frac{v^2}{(54,7)^2} = \frac{v^2}{2992}$:

$$0,44 = 0,06224 . v^2 + \tfrac{764}{728} . \tfrac{265}{2992} . v^2$$

$$v = \sqrt{\tfrac{4400}{1552}} = 1^m,683$$

Wiederum also

$$t_1 = 2,00 - 0,06224 . v^2 = 2,00 - 0,176 = 1^m,824.$$

Ein Rechnungsgang, der in gleicher Weise noch fortgesetzt werden könnte.

---

*) Traité d'Hydraulique, p. 150.

Wir betrachten indeß letztere Werthe für gegenwärtigen Zweck als hinreichend genau und finden daher das dem Canale zu gebende relative Gefälle, nach II:

$$\frac{e}{l} = \frac{\eta - (t - t_1)}{l} = \frac{0,440 - 0,1762}{265} = 0,000995.$$

Endlich die pr. Secunde zugeführte Wassermenge

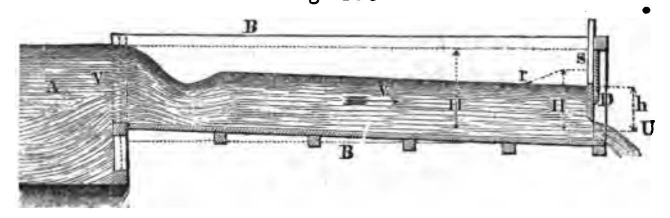
$$Q = 1,8238 . 4 . 1,683 = 12,276 \text{ Cub. Meter.}$$

§. 131.

Was sich in den Fällen ereignet, wenn die Spitze des Canales mit einer Schützöffnung versehen ist, durch welche der Eintritt des Wassers erfolgt, erhellt ohne Weiteres aus den neuesten Versuchen Lesbros über diesen Gegenstand, §. 94, so wie aus den betreffenden Rechnungen etc. des §. 95, wenn man wiederum die Gleichung für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen entsprechend in Verbindung bringt. Welches Rechnungsverfahren endlich beobachtet werden muß, wenn am unteren Ende des Canales eine Schützvorrichtung angebracht ist, wird aus nachstehender von Poncelet *) gelösten Aufgabe klar.

Es sei $H - h$ die Differenz der Wasserstände H im Sammelbehälter und h unmittelbar vor dem Schützen der Ausflußöffnung, Fig. 156, beide vom Schwerpunkte der letzteren aus gemessen. Man soll den Verlust an Druckhöhe und die Geschwindigkeit, womit das Wasser aus der Schützöffnung bei D tritt, berechnen, wenn hierzu alle erforderlichen Werthe gegeben sind.

Fig. 156.



Zur betreffenden Auflösung sei M die pr. Secunde in den Canal B aus dem Sammelbehälter A mit der Geschwindigkeit V tretende Wassermasse, v die mittlere Geschwindigkeit der als gleichförmig vorauszusetzenden Bewegung des Wassers im Canale, U die Geschwindigkeit in der Ausflußöffnung $= \omega$ bei D, ferner sei μ der Ausflußcoefficient an letzterer Stelle, so wie α der Coefficient für die Zusammenziehung des Strahles am oberen Ende des Canales bei A.

*) Cours de Mécanique appliquée aux Machines, Sect. VI, Nr. 78.

Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte in Verbindung mit dem Principe Carnots (Zusatz S. 63 Geodynamik) liefert hier, mit Bezug auf den Widerstandsausdruck (1) §. 120, ohne Weiteres die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} M(U^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} Mv^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = gMH - \frac{\gamma}{g} pl(\alpha v + \beta v^2) v,$$

oder wegen $M = \frac{\gamma a v}{g}$, d. i. $\frac{\gamma}{g} v = \frac{M}{a}$:

$$\tfrac{1}{2} M(U^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} Mv^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = gMH - M\frac{pl}{a}(\alpha v + \beta v^2),$$

oder auch $\frac{U^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = H - \frac{pl}{a}(Av + Bv^2)$.

Beachtet man, daß hier nach $U^2 = v^2 + 2gh$ ist, so folgt

$$\frac{v^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right\} - \frac{V^2}{2g} + \frac{pl}{a}(Av + Bv^2) = H - h,$$

oder endlich, wenn man $\frac{V^2}{2g}$ als klein genug vernachlässigt und $H - h = h_1$ setzt:

$$\text{I.} \quad h_1 = H - h = \frac{v^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right\} + \frac{pl}{a}(Av + Bv^2).$$

Führt man hier wieder $\frac{v^2}{k^2}$ statt $Av + Bv^2$ ein und beachtet, daß auch $av = \mu\omega U = Q$ ist, wo Q die pr. Secunde durch die Schützmündung fließende Wassermenge bezeichnet, so findet sich:

$$h_1 = \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \frac{U^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g\frac{pl}{ak^2}\right\}.$$

Ueber den Schwerpunkt der Schützöffnung D verbleibt sonach als Druckhöhe $= h$

$$h = H - h_1, \text{ d. i.}$$

$$h = H - \frac{U^2}{2g} \cdot \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + y\frac{pl}{ak^2}\right],$$

oder weil $h = \frac{U^2}{2g}$ ist, auch

$$\text{II.} \quad H = \frac{U^2}{2g}\left\{1 + \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g\frac{pl}{ak^2}\right]\right\} \text{ und}$$

$$\text{III.} \quad U = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g\frac{pl}{ak^2}\right]}},$$

so wie endlich:

$$\text{IV.}\quad Q = \mu\omega \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{\mu\omega}{a}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 2g\frac{pl}{ak^2}\right]}},$$

wo μ, je nach der betreffenden Anordnung der Mündung, aus §. 92, 93 oder 94 zu entnehmen ist.

Erhebt sich vor dem Ausflusse bei D der Wasserspiegel wieder, d. h. bildet sich ein Stau an der Schützenstelle, (wie die punktirte Linie rs, Fig. 156, erkennen läßt), so kann man die Formel des §. 67 in Anwendung bringen, wie die jüngsten Versuche von Lesbros ohne Zweifel lehren. *) Bezeichnet hierzu H' die im Canale an einer Stelle gemessene Druckhöhe, woselbst die Stauoberfläche sich im Beharrungszustande befindet (bei Lesbros etwa 1 Meter aufwärts), so wie Ω den Profilquerschnitt daselbst, so erhält man:

$$U = \sqrt{\frac{2gH'}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}} \quad \text{und} \quad Q = \mu_1\omega U.$$

Die betreffenden Ausflußcoefficienten μ_1 variiren dabei nach Lesbros, wie folgende kleine Tabelle zeigt:

H'	μ_1
Meter	
1,4195	0,658
1,0437	0,662
0,7651	0,658
0,4410	0,660
0,2244	0,643
0,1696	0,625
0,1200	0,604

Ausführliches hierüber enthält das später folgende Staucapitel.

Beispiel. Für den Zweck eines Wasserradbetriebes verlangt man, daß der Ausfluß aus der Schützenöffnung D, Fig. 156, mit einer Geschwindigkeit von 3,3 Meter erfolgt, während die Aufschlagwassermenge pr. Secunde 0,72 Cubikmeter beträgt, der Canal (das Gerinne) eine Länge von 100 Metern hat. Die Ausflußöffnung bei D soll 3,0 Meter lichte Weite und 0,10 Meter Höhe erhalten, das Wasser im Gerinne, bei 3,29 Meter Breite eine Tiefe von 0,546 Meter besitzen, während $\mu = 0,72$ und $\alpha = \frac{2}{3}$ angenommen wurde. Es ist die erfor-

*) Experiences, pag. 195, mit zugehörigen Abbildungen auf Taf. 7.

derliche Druckhöhe H, Fig. 156, im Sammelbehälter und die Differenz zwischen dieser Druckhöhe und der h vor der Schützenöffnung D zu berechnen.

Auflösung. Es ist $\omega = 3 \cdot 0{,}1 = 0^{\square m}{,}3$; $\mu\omega = 0{,}72 \cdot 0{,}3 = 0{,}216$; $a = 0{,}546 \cdot 3{,}29 = 1{,}8^{\square m}$; $v = \frac{Q}{a} = \frac{0{,}72}{1{,}80} = 0^m{,}4$. Hiernach wenn man $k^2 = 2500$ setzt, $\frac{2g}{k^2} = \frac{19{,}62}{2500} = 0{,}00784$. Ferner $p = 3{,}290 + 1{,}092 = 4{,}382$; $\frac{pl}{a} = \frac{4{,}382 \cdot 100}{1{,}80} = 243{,}4$.

Sonach zufolge II:

$$H = 0{,}555 \left\{ 1 + 0{,}0144 \, [1{,}25 + 1{,}9082] \right\}, \text{ d. i.}$$

$$H = 0^m{,}580.$$

Ferner berechnet sich: $h = \frac{(3{,}3)^2 - (0{,}4)^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0^m{,}546$, daher endlich:

$$H - h = 0{,}580 - 0{,}546 = 0^m{,}034.$$

Hieraus erhellt, daß der Einfluß der hier in Rechnung gebrachten Widerstände höchst gering ist.

Drittes Kapitel.

Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen.

§. 132.

Aus den §. 120 aufgestellten Bedingungen, unter welchen allein eine gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen stattfindet, folgt ohne Weiteres, daß eine ungleichförmige Bewegung allemal vorhanden ist, sobald die Querprofile des strömenden Wassers eines und desselben Canales verschieden sind, das Bodengefälle veränderlich, null oder die Neigung des Bodens gar der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Eben so tritt noch Ungleichförmigkeit der Bewegung ein, wenn in einem Canale von sonst gleichem Profile und Längengefälle Einbaue (Wehre, Buhnen, Brücken etc.) vorkommen, wodurch, von der Stelle des bemerkten Hindernisses ab, der Wasserspiegel auf eine mehr oder weniger lange Strecke stromaufwärts erhoben (gestaut) wird.

Um hierbei überhaupt Rechnungen möglich zu machen, setzen wir abermals voraus, daß für die Zeitintervalle der betreffenden Rechnungen und Beobachtungen, gleiche Wasser-

mengen Q pr. Secunde durch die verschiedenen Querschnitte a_0, a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1} + a_n gehen, so daß wenn man beziehungsweise die zugehörigen mittleren Geschwindigkeiten mit v_0, v_1, v_2, v_3 .... v_n bezeichnet, die Gleichung statt hat: $Q = a_0 v_0 = a_1 v_1 = a_2 v_2 = a_3 v_3 \ldots a_n v_n$.

Unter dieser letzten Voraussetzung nennt man die ungleichförmige Bewegung eine permanente.

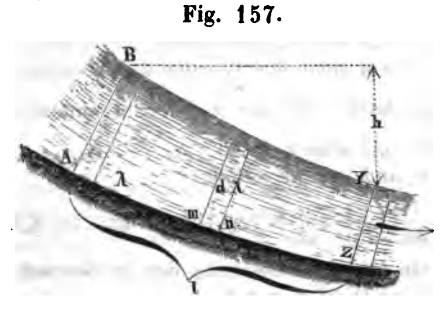
Ferner werde noch vorausgesetzt, daß die fließende Wassermasse aus ziemlich parallelen Fäden besteht und daß Wirbel und Gegenströme gar nicht vorhanden sind, auch die bemerkten Querschnitte ihre Gestalt und Größe nur in sanften Uebergängen verändern und demnach aus diesen und anderen Ursachen plötzliche Geschwindigkeitsänderungen nicht vorkommen.

Anmerkung. Von den in folgenden Paragraphen zu entwickelnden Formeln ist natürlich noch weniger, als von den für die gleichförmige Bewegung gewonnenen, für die Praxis zu erwarten, daher bei ihrem Gebrauche auch noch mehr Vorsicht zu empfehlen ist. Höchst wahrscheinlich wird man erst dann bessere Uebereinstimmung mit der Erfahrung erwarten können, wenn die Theorie der gleichförmigen Bewegung auf festerem Grunde steht, als dies gegenwärtig der Fall ist.

§. 133.

Mit Bezug auf die bemerkten Voraussetzungen mögen in Fig. 157 AB und YZ zwei normale Querschnitte des strömenden Wasserkörpers vom Inhalte a_0 und a_n sein, deren Wasserperimeter wir beziehungsweise mit p_0 und p_n, so wie die betreffenden Geschwindigkeiten mit v_0 und v_n bezeichnen, während die rectificirte Länge des Bodens $AZ = l$ gesetzt werden mag. An einer Stelle m zwischen den gedachten Profilen, befinde sich ein von diesen verschiedenes Profil vom Inhalte $= a$, Wasserperimeter $= p$ und in welchem eine mittlere Geschwindigkeit $= v$ vorhanden ist.

Fig. 157.



Bezeichnet endlich m die Wassermasse, welche während einer sehr kleinen Zeit τ durch jede der Verticalschichten fließt, in welche man sich den ganzen strömenden Körper getheilt vorstellen kann, so erhält man sofort:

$$m = \frac{\gamma a_0 v_0 \tau}{g} = \frac{\gamma a_n v_n \tau}{g} = \frac{\gamma a v \tau}{g}.$$

Ist endlich h das Gefälle zweier Punkte vom Wasserspiegel der Profile AB und YZ, so erhält man nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, mit Bezug auf §. 119 und (1) §. 120, für das betreffende Bewegungsgesetz die Gleichung

$$(1) \quad \frac{m}{2}(v_n^2 - v_0^2) = gmh - \frac{\gamma}{g}\Sigma_0^l\,[p\lambda\,(\alpha v + \beta v^2)\,v\tau]$$

wobei λ den Abstand mm' zweier sehr nahe liegender Profile bezeichnet.

Da ferner $m = \frac{\gamma a v \tau}{g}$, also $\frac{\gamma}{g} v\tau = \frac{m}{a}$ ist, so folgt aus (1) auch

$$\frac{m}{2}(v_n^2 - v_0^2) = gmh - m\Sigma_0^l\left[\frac{p}{a}(\alpha v + \beta v^2)\,\lambda\right], \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad \frac{1}{2g}(v_n^2 - v_0^2) = h - \Sigma_0^l\left[\frac{p}{a}(Av + Bv^2)\,\lambda\right].$$

Die durch das Zeichen Σ angedeutete Summirung, welche sich auf die ganze Ausdehnung $= l$ des betreffenden Canal-stückes erstreckt, läßt sich, ohne Hülfe höherer Rechnungen, nur annäherungsweise und zwar dadurch ausführen, daß man die Länge l in Theile λ_0, λ_1, λ_2 ... von solcher Kleinheit theilt, daß man in den zwischenliegenden Schichten, ohne merklichen Fehler, mittlere Geschwindigkeit, Wasserperimeter und Profile als (beinah) constant annehmen kann.

Auch kann man dabei von der Simpson'schen Regel nützlichen Gebrauch machen, indem man die Werthe der verschiedenen Ausdrücke $\frac{p}{a}(Av + Bv^2)\,\lambda$ für die $n+1$ auf einander folgenden Profile berechnet, die durch z_0, z_1, z_2 ... z_{n-1}, z_n ausgedrückt werden mögen und sodann erhält:

$$\Sigma_0^l\left[\frac{p}{a}(Av + Bv^2)\,\lambda\right] = \frac{l}{3n}(z_0 + 4z_1 + 2z_2 + 4z_3 \ldots 4z_{n-1} + z_n).$$

Gewöhnlich benutzt man I. zur Bestimmung der pr. Secunde abfließenden Wassermenge $= Q$ oder zur Ermittelung des Gefälles $= h$ zwischen den betreffenden Profilen, und schlägt dabei folgendes Verfahren ein.

Man entfernt die Geschwindigkeiten, da

$$v_0 = \frac{Q}{a_0},\ v_1 = \frac{Q}{a_1} \ldots v_n = \frac{Q}{a_n}$$

ist, und entwickelt die angedeutete Summe, erhält also:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_0^2}\right)Q^2 = h - A\left(\frac{p_1\lambda_1}{a_1^2} + \frac{p_2\lambda_2}{a_2^2} \ldots \frac{p_n\lambda_n}{a_n^2}\right)Q -$$

$$B\left(\frac{p_1\lambda_1}{a_1^3} + \frac{p_2\lambda_2}{a_2^3} \ldots \frac{p_n\lambda_n}{a_n^3}\right)Q^2.$$

Bezeichnet man links den Factor von Q^2 mit E, den rechts von Q mit F und den von Q^2 mit G, so ergiebt sich:

$$EQ^2 = h - FQ - GQ^2, \text{ d. i. entweder}$$

$$\text{II.} \quad h = Q^2(E+G) + FQ, \text{ oder}$$

$$Q^2 + \frac{F}{E+G} Q = \frac{h}{E+G},$$

$$\text{III.} \quad Q = -\tfrac{1}{2}\frac{F}{E+G} + \sqrt{\frac{h}{E+G} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{F}{E+G}\right)^2}.$$

Zusatz. Zur Beurtheilung der Uebereinstimmung der Resultate vorstehender Formeln mit den Erfahrungswerthen, diene Nachstehendes.

St. Guilhem berechnet nach Funk'schen Messungen in der Weser (Annales des Ponts et Chaussées, Jahrg. 1838, 2, p. 252) unter Voraussetzung der Eytelwein'schen Coefficienten, §. 120, mittelst III. (Nr. 490 bis mit 502 der Funk'schen Resultate):

$$Q = 3042 \text{ Cub. Fuß hannov.},$$

während die Messung mit dem Woltmann'schen Flügel gab:

$$Q = 2984 \text{ Cub. Fuß.}$$

Eben so findet derselbe Ingenieur für eine andere Stelle der Weser (Nr. 404 bis mit 408 der Versuche Funk's)

$$Q = 3104 \text{ Cub. Fuß hannov.},$$

während die directe Messung lieferte

$$Q = 2984 \text{ Cub. Fuß.}$$

Weniger günstige Resultate erhielt Minard (Cours de construction des canaux, pag. 39) bei Gefällsberechnungen nach der etwas abgeänderten Formel I. Ob jedoch dabei Flußstrecken gewählt wurden, welche den früheren Voraussetzungen (§. 132) entsprechen, ist jedoch eben so fraglich, als ob die Zahl der angenommenen Zwischenprofile für den betreffenden Fall als hinreichend betrachtet werden konnte.

In letzterer Beziehung zeigt unter andern Weisbach (Allgem. Maschinenencyclopädie, Artikel „Bewegung des Wassers", Seite 150—152) recht treffend, wie wichtig es ist, unter Umständen, die bemerkte Zahl von Zwischenprofilen entsprechend groß zu nehmen. Derselbe wendet Formel III. zur Berechnung der Wassermenge der Saale an, unter Zuziehung von Funk-Zimmermann'schen Messungen, nimmt 9 Querprofile auf eine Strecke von 8 . 300 = 2400 Fuß an und findet sodann

$$Q = 1666 \text{ Cub. Fuß pr. Secunde},$$

während die Messung mittelst des Woltmann'schen Flügels ergab

$$Q = 1578 \text{ Cub. Fuß.}$$

Der betreffende Fehler beträgt daher noch nicht 6 Procent, ein Ergebniß, was um so befriedigender genannt werden muß, als die in der Wirklichkeit vorhandene Flußkrümmung außer Acht gelassen wurde.

Beispiel 1. Aus den in folgender Tabelle zusammengestellten Funk'schen Messungen *), in der Weser unweit Hameln vorgenommen, ist mit Hülfe unserer Formel III. die pr. Secunde abfließende Wassermenge zu berechnen.

Auflösung. Von den überhaupt aufgeführten dreizehn Profilen in einer Längenstrecke von 8776 hannov. Fußen, nehmen wir vier Zwischenprofile, in der aus der Tabelle selbst verständlichen Weise und benutzen außerdem die auf hannoversche Fuße reducirte Prony-sche Formel (III, Seite 298):

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{h}{l} = 0{,}00004445 \cdot v + 0{,}000090336 \cdot v^2.$$

Eben so werde bemerkt, daß die Erdacceleration $g = 33{,}6$ hannov. Fuße beträgt, also $\frac{1}{2g} = 0{,}015$ ist.

Alle Maße der folgenden Tabelle sind hannoversche. **)

Nr. der Funk'schen Versuche	Mittlere Gefälle der beiden Ufer	Profil-inhalt in Quadrat-Fußen	Mittel-werthe $= a$ in Quadrat-Fußen	Was-ser-peri-meter in Fußen	Mittel-werthe $= p$ in Fußen	Ent-fernung vom Anfangs-punkte des Nivelle-ments in Fußen	Mittel-werthe $= \lambda$ in Fußen
490	20,7868	1158		340		46648	
491	21,0671	880	924	371	316	47184	2064
492	21,4911	878		308		48088	
493	21,8653	780		244		48712	
494	22,2425	990	757	354	323	49392	2264
495	22,7263	652		354		50176	
496	23,2596	604		338		50976	
497	23,9456	600	772	306	324	51760	2288
498	24,6041	778		332		52512	
499	24,7794	1104		324		53264	
500	24,9488	1294	1352	300	289	53968	2164
501	25,0702	1305		244		54720	
502	25,1284	1704		286		55424	

*) Darstellung der wichtigsten Lehren der Hydrotechnik, S. 100.
**) 1 Fuß hannov. = 0,2920947 Meter.

Hiernach ist zuerst

$$h = (25{,}1284 - 20{,}7868) = 4{,}3416,$$

wofür wir setzen:

$$h = 4{,}342 \text{ Fuß}.$$

Ferner ist:

$$E = \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{a_4^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) = 0{,}015\left[\frac{1}{(1352)^2} - \frac{1}{(924)^2}\right];$$

$$E = -0{,}00000000928.$$

$$F = A\Sigma\left(\frac{p\lambda}{a^2}\right);$$

$$F = 0{,}00004445\,(0{,}7639 + 1{,}276 + 1{,}243 + 0{,}3415);$$

$$F = 0{,}0001611.$$

$$G = B\Sigma\left(\frac{p\lambda}{a^3}\right);$$

$$G = 0{,}000090336\,(0{,}0008267 + 0{,}001685 + 0{,}001611 + 0{,}0002525);$$

$$G = 0{,}0000003952.$$

Daher:

$$Q^2 + 417{,}44\,Q = 11251036{,}48$$

$$Q = -208{,}72 + \sqrt{11294600{,}52}$$

$$Q = -208{,}72 + 3360{,}74$$

$$Q = 3152 \text{ Cubikfuß}.$$

Da die Messung mit dem Woltmann'schen Flügel

$$Q = 2984 \text{ Cubikfuß}$$

lieferte, so giebt dies eine Differenz von 168 Cubikfuß, oder eine Abweichung um $\frac{168}{2984} = 5{,}6$ Procent, also eine Genauigkeit, die, den Umständen nach, als hinreichend bezeichnet werden kann.

Beispiel 2. D'Aubuisson*) theilt in nachstehendem Täfelchen eine der Zusammenstellung im vorigen Beispiele ähnliche Reihe von Messungen an einer 414,9 Meter langen Flußstrecke mit, aus denen ebenfalls die pr. Secunde abfließende Wassermenge berechnet werden und diese mit der directen Messung unter Zuziehung eines Tachometers verglichen werden soll?

Auflösung. Die gedachten Messungen und danach gemachten Berechnungen lieferten:

---

*) Traité d'hydraulique, Nr. 157.

Nr. des Profiles	Längen der einzelnen Distanz. in Metern $=\lambda$	Gefälle von Profil zu Profil, in Metern	Wasser-peri-meter $=p$ in Metern	Flächeninhalt der Profile $=a$ in Quadrat-Metern	Werthe von $\frac{p\lambda}{a^3}$	Werthe von $\frac{p\lambda}{a^3}$
0	0,0	0,0	99,0	76,68	0,0	0,0
1	159,4	0,1720	110,8	73,84	3,238	0,04385
2	65,6	0,0709	99,1	45,51	3,138	0,06896
3	61,0	0,0659	94,1	64,05	1,398	0,02182
4	79,7	0,0852	94,4	45,51	3,632	0,07980
5	49,2	0,0531	117,8	62,68	1,476	0,02355
Summen	414,9	0,4471			12,882	0,23798

Hiernach ist $h = 0^m,4471$ und mit Bezug auf III:

$$E = 0,051\,(0,0002546 - 0,0001701) = 0,00000431;$$
$$F = 0,00004445\,.\,12,882 = 0,0005726;$$
$$G = 0,00030931\,.\,0,23798 = 0,00007360.$$

Daher:

$$E + G = 0,00007791;$$
$$\frac{F}{E+G} = \frac{0,0005726}{0,00007791} = 7,349;$$
$$\frac{1}{E+G} = \frac{1}{0,00007791} = 12835,32;$$

und sonach:

$$Q^2 + 7,349\,.\,Q = 12835,32\,.\,h$$
$$Q^2 + 7,349\,.\,Q = 5738,67$$
$$Q = -3,674 + \sqrt{5752,1683}$$
$$Q = -3,674 + 75,842$$
$$Q = 72,168 \text{ Cub. Meter.}$$

D'Aubuisson findet unter Annahme der Eytelwein'schen Coefficienten (§. 120, Seite 302):

$$Q = 68,4 \text{ Cub. Meter.}$$

Die Messung mit dem Tachometer gab:

$$Q = 75,1 \text{ Cub. Meter, d. i.}$$

gegen unsere Rechnung (wobei die Prony'schea Coefficienten, S. 297, gewählt wurden) eine Differenz von 3 Cubikmeter, oder eine Abweichung um 4 Procent.

[§. 134.]

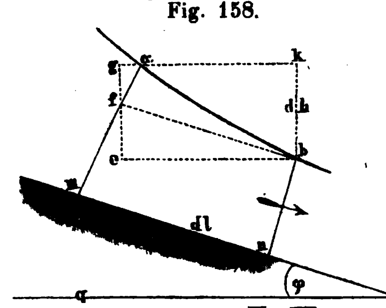
Differenzirt man die Gleichung I. des vorigen Paragraphen, so ergiebt sich

$$(1)\quad \frac{vdv}{g} = dh - \frac{p}{a}(Av + Bv^2)\, dl\,^{*}),$$

ein Ausdruck, der vorzugsweise dazu benutzt wird, die Länge l durch die Wassertiefe, oder auch diese letztere Größe durch die erstere auszudrücken.

Für die gedachten Zwecke ist es von Vortheil, (1) wie nachstehend umzugestalten.

Fig. 158.



Hierzu sei *abmnq*, Fig. 158, das Längenprofil einer Stromstrecke von der Länge $mn = dl$ und dem Neigungswinkel φ des Bodens; ferner sei die größte Tiefe des Profiles, stromaufwärts, d. i. $\overline{am} = y$, die kleinste stromabwärts $\overline{bn} = y - dy$, so daß af die Größe dy darstellt.

Sodann ist, wenn $\overline{eb}$ und $\overline{gak}$ parallel zum Horizonte gezogen werden, ge und kb aber Verticallinien sind und $\overline{fb} \parallel \overline{mn}$ genommen wird:

$$\overline{kb} = \overline{gf} + \overline{fe}, \text{ oder}$$
$$dh = -dy \cdot \cos\varphi + dl \cdot \sin\varphi.$$

Hiernach folgt aus (1)

$$(2)\quad \frac{vdv}{g} = -dy \cdot \cos\varphi + dl \cdot \sin\varphi - \frac{p}{a}(Av + Bv^2)\, dl.$$

---

*) Sehr oft führt man noch als Factor des linken Theiles dieser Gleichung einen Erfahrungscoefficienten α' ein und schreibt:

$$\alpha' \frac{vdv}{g} = dh - \frac{p}{a}(Av + Bv^2)\, dl.$$

Hiermit glaubt man den Fehler corrigiren zu können (?), den man dadurch begeht, daß man statt der Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Stromfäden, die lebendige Kraft nimmt, welche der mittleren Geschwindigkeit entspricht. Man sehe deshalb eine Arbeit von Vauthier (Annales des Ponts et Chaussées 1836, 2, p. 377) wobei derselbe räth, $\alpha' = 1{,}03$ zu nehmen für mittlere Geschwindigkeiten von $1^m{,}5$, dagegen $\alpha' = 1{,}10$ wenn die mittlere Geschwindigkeit $0^m{,}25$ ist. Bemerkenswerth sind Dupuit's Ansichten über diesen Gegenstand, in dessen Etudes p. 73. Zur Zeit ist jedoch noch nicht zu rathen, von dieser Correction für die Praxis Gebrauch zu machen.

Aus dieser Gleichung entferne man dv, indem man beachtet, daß, wenn Q die pr. Sec. abfließende Wassermenge bezeichnet, $v = \frac{Q}{a}$ und $dv = -\frac{Q . da}{a^2} = -\frac{v}{a} da$ ist.

Statt da kann man aber schreiben $da = x . dy$, wenn x die horizontale Breite des Wasserspiegels im Querprofile a bezeichnet, d. h. es ist auch

$$dv = -\frac{v . x}{a} . dy.$$

Daher wird aus (2)

$$-\frac{v^2}{g} . \frac{x}{a} . dy + dy . \cos \varphi = dl . \sin \varphi - \frac{p}{a}(Av + Bv^2) \, dl$$

und daher:

$$\text{I.} \quad \frac{dl}{dy} = \frac{\frac{v^2}{g} . \frac{x}{a} - \cos \varphi}{\frac{p}{a}(Av + Bv^2) - \sin \varphi}.$$

In den meisten Fällen ist φ sehr klein, weshalb man setzen kann $\cos \varphi = 1$. Setzt man überdies $\sin \varphi = i$, so folgt:

$$\text{II.} \quad \frac{dl}{dy} = \frac{\frac{v^2}{g} . \frac{x}{a} - 1}{\frac{p}{a}(Av + Bv^2) - i}.$$

Führt man hier Q ein und ersetzt, nach §. 122, $Av + Bv^2$ durch $\frac{v^2}{k^2}$ und beachtet, daß $dy = \frac{da}{x}$ ist, so ergiebt sich

$$\text{III.} \quad dl = \frac{1}{i . x} . \frac{\frac{x}{g} Q^2 - a^3}{\frac{pQ^2}{ik^2} - a^3} . da.$$

Kann man endlich eine durchaus constante mittlere Breite $= b$ der Profile in Rechnung bringen, also $a = b . y$ und überdies $x = b$ setzen, so erhält man endlich:

$$\text{IV.} \quad i . dl = \frac{\frac{Q^2}{gb^2} - y^3}{\frac{pQ^2}{ib^3k^2} - y^3} . dy.$$

Anmerkung. Vorstehende Gleichungen wurden zuerst, in sehr wenig anderer Gestalt, im Jahre 1828 von Poncelet, mit Hülfe des

Principes von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, bei seinen Vorträgen an der Ecole d'application zu Metz, abgeleitet und zwar die Hauptgleichung I, §. 133, unter der Form:

$$\tfrac{1}{2}(v_n^2 - v_0^2) = g.h - \int_0^l \frac{p}{a}(\alpha v + \beta v^2)\, dl. \text{*)}$$

Ebenfalls 1828 erschien auch Belanger's Arbeit: „Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes", welcher dieselben Gleichungen, jedoch in bei Weitem weniger klarer Weise wie Poncelet ableitete, indeß an vielen Zahlenbeispielen zeigte, wie man mit denselben rechnen kann, ohne deren Integration in gewöhnlicher Weise vorzunehmen, indem er einen Weg einschlug, der jenem in der Hauptsache gleich kommt, welcher bereits §. 133 verfolgt wurde.

Auf verschiedene praktische Fälle von größerem Umfange wandte diese ganze Methode zuerst 1836 Vauthier in einer Abhandlung an: „De la théorie du mouvement permanent des eaux courantes et de ses applications à la solution de plusieurs problèmes d'hydraulique". **)

Höchst beachtungswerthe Kritiken über die ganze gegenwärtige Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers in Canälen, macht Dupuit in seinen bereits mehrfach aufgeführten: „Etudes etc. sur le mouvement des eaux courantes, p. 37."

Von geringerer Bedeutung, jedoch immerhin der Beachtung werth, ist eine Arbeit, über denselben Gegenstand, von Courtois in dessen „Traité des moteurs", 2e partie, Paris 1850.

[§. 135.]

Um die Brauchbarkeit vorstehender Formeln in manchen praktischen Fällen darzuthun, mag zunächst II. zur Lösung eines Belangerschen Zahlenbeispieles ***) vorbereitet werden.

Der Boden des betreffenden Canales (l'Aqueduc de Ceinture in Paris) sei ganz horizontal, also i = Null, so daß aus II. wird:

$$(1) \quad \frac{dl}{dy} = \frac{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{x}{a} - 1}{\frac{p}{a}(Av + Bv^2)}.$$

Wie bereits erwähnt integrirt Belanger diesen Ausdruck in gewöhnlicher Weise nicht, sondern betrachtet die Differenzialien als Differenzen, schreibt, indem er gleichzeitig l stromaufwärts zählt

$$(2) \quad \Delta l = \frac{a - \frac{v^2}{g}.x}{p(Av + Bv^2)}.\Delta y,$$

*) Man sehe hierzu besonders: Poncelet's Cours de Mécanique appliquée aux Machines, Sect. VI, Nr. 30.

**) Annales des Ponts et Chaussées, 1836, 2, p. 241.

***) a. a. O. Nr. 25.

und verfährt übrigens ganz so wie §. 133 bei der Lösung derartiger Zahlenbeispiele, was auch aus dem Nachstehenden ferner klar werden wird.

Zum Vergleiche mit diesem Verfahren integriren wir erstere Gleichung mit Dupuit*) direct, schicken jedoch noch einige entsprechende Umgestaltungen derselben und fernere Annahmen voraus.

Zuerst nehmen wir die Profilquerschnitte (nahezu) als Rectangel von gleicher Breite $x = 2b$ an, erhalten also

$$a = 2by,\ Q = 2vby,\ v = \frac{Q}{2b} \cdot \frac{1}{y},$$

oder wenn zur Abkürzung $\frac{Q}{2b} = r$ gesetzt wird,

$$v = \frac{r}{y},\ \text{daher}$$

$$\frac{dl}{dy} = \frac{\frac{2b}{2by} \cdot \frac{r^2}{g} \cdot \frac{1}{y^2} - 1}{\frac{2b+2y}{2by}\left(A\frac{r}{y} + B\frac{r^2}{y^2}\right)},\ \text{oder}$$

$$\frac{dl}{dy} = b \cdot \frac{\frac{r^2}{g} - y^3}{(b+y)(Ary + Br^2)}.$$

Hier wieder $Ary + Br^2 = m$ als constant angenommen, liefert endlich:

$$\frac{m.l}{b} = \frac{r^2}{g}\int\frac{dy}{b+y} - \int\frac{y^3dy}{b+y} + \text{Const.}$$

Beachtet man hier, daß

$$\frac{y^3}{y+b} = y^2 - by + b^2 - \frac{b^3}{b+y}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{m.l}{b} = \left(\frac{r^2}{g} + b^3\right) lgnt\,(b+y) - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{2}y^2b - yb^2 + \text{Const.}$$

Bezeichnet ferner Y die größte Wassertiefe stromaufwärts, so wird $l =$ Null für $y = Y$ und daher das bestimmte Integral:

$$(3)\ l = \frac{b}{m}\left[\left(\frac{r^2}{g} + b^3\right) lgnt\left(\frac{b+y}{b+Y}\right) - \tfrac{1}{3}(y^3 - Y^3) + \tfrac{1}{2}b(y^2 - Y^2) - b^2(Y - y)\right]$$

Beispiel. Der Canal des Aqueduc de Ceinture in Paris führt pr. Secunde eine Wassermenge von 0,8 Cubikmeter, bei ganz horizontalem Boden ab und hat bei seiner Ausmündung eine Wassertiefe

*) Etudes Nr. 54.

von $0^m,4$. Die Seitenwände haben eine $\frac{1}{32}$fache Anlage und die Sohle eine constante Breite von $1^m,3$; es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts die Wassertiefe $1^m,7$ beträgt?

Erste Auflösung.

Des bemerkten Vergleiches mit den Belanger'schen Zahlenwerthen wegen rechnen wir hier mit den Eytelwein'schen Coefficienten, setzen also nach §. 120, Seite 302:

$$A = 0{,}0000243;\ B = 0{,}000366.$$

In Bezug auf Gleichung (3) ist ferner $Y = 1^m,7$, $y = 0^m,4$, daher die mittlere Tiefe auf die bemerkte Strecke: $\frac{1,7 + 0,4}{2} = 1{,}05$, und deshalb die mittlere Breite im Wasserspiegel des trapezförmigen Profiles:

$$1{,}3 + \tfrac{2}{32} \,.\, 1{,}05 = 1^m,366, \text{ also}$$

$$2b = \frac{1{,}30 + 1{,}366}{2} = 1{,}333 \text{ und}$$

$$b = 0^m,67.$$

Ferner

$$r = \frac{Q}{2b} = \frac{0{,}8}{1{,}333} = 0{,}6,$$

so wie, wegen $m = Ary' + Br^2$:

$$Ary' = 0{,}0000243 \,.\, 0{,}6 \,.\, 1{,}05 = 0{,}000015309;$$
$$Br^2 = 0{,}000366 \,.\, 0{,}36 = 0{,}00013176;$$
$$m = 0{,}000147069.$$

Deshalb aber aus (3):

$$l = \left\{ \begin{matrix} \frac{0{,}67}{0{,}000147069} \Big[\left(\frac{0{,}36}{9{,}81} + 3{,}01 \right) lgnt \frac{1{,}07}{2{,}37} - \frac{1}{3}(0{,}064 - 4{,}913) \\ + \frac{1}{2} \,.\, 0{,}67\,(0{,}16 - 2{,}89) - 0{,}4489\,(0{,}40 - 0{,}70) \Big] \end{matrix} \right\},$$

d. i. $l = 4639$ Meter.

Zweite Auflösung.*)

Mit Bezug auf Gleichung (2) ist

$$x = 1{,}30 + \tfrac{2}{32} \,.\, y = \tfrac{1}{32} \,.\, (41{,}6 + 2y);$$
$$p = 1{,}30 + 2y\sqrt{1 + (\tfrac{1}{32})^2} = \tfrac{1}{32}(41{,}6 + 64{,}03 \,.\, y);$$
$$a = \frac{y}{2}(1{,}30 + x) = \frac{y}{32}(41{,}6 + y);$$
$$v = \frac{Q}{a} = \frac{0{,}80}{a}.$$

*) Belanger: Essai etc. Nr. 28.

$$\text{Daher } \Delta l = \frac{32 \,.\, a - \frac{v^2}{2g}(83{,}2 + 4y)}{(41{,}6 + 64{,}03 \,.\, y)(Av + Bv^2)} \,.\, \Delta y.$$

Von $y = 0^m{,}4$ anfangend und um $0^m{,}1$ fortschreitend hat Belanger nach und nach folgende Tabelle berechnet, welche, mit Rücksicht auf vorstehenden Ausdruck für Δl, von selbst verständlich ist.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
y	$32 \,.\, a$	$v = \frac{25{,}6}{32.a}$	$\frac{v^2}{2g}$	$83{,}2 + 4y$	Producte der Columnen 4 und 5 $= P$	$32a - P$	$32p = 41{,}6 + 64{,}03y$	$Av + Bv^2$	Nenner des Ausdruckes $\frac{\Delta l}{\Delta y}$ oder Product aus 8 und 9	$\frac{\Delta l}{\Delta y}$ oder Quotient aus 7 durch 10	Abstände der auf einander folgenden Tiefen
$0^m{,}40$	16,80	1,523	0,1182	84,80	10,0234	6,7766	67,212	0,0008848	0,059469	114	23^m
0,50	21,95	1,216	0,0753	85,20	6,4156	14,6344	73,615	0,0005701	0,041968	349	50
0,60	25,32	1,011	0,0521	85,60	4,4598	20,8602	80,018	0,0003982	0,031863	655	84
0,70	29,61	0,865	0,03814	86,00	3,2800	26,3300	86,421	0,0002945	0,025451	1035	126
0,80	33,92	0,755	0,02906	86,40	2,5108	31,4092	92,824	0,0002267	0,021043	1493	176
0,90	38,25	0,669	0,02281	86,80	1,9799	36,2701	99,227	0,0001798	0,017841	2033	234
1,00	42,60	0,601	0,01841	87,20	1,6054	40,9946	105,630	0,0001466	0,015485	2647	299
1,10	46,97	0,545	0,01514	87,60	1,3263	45,6437	112,033	0,0001218	0,013646	3345	373
1,20	51,36	0,498	0,01242	88,00	1,0930	50,2670	118,436	0,0001027	0,012163	4133	455
1,30	55,77	0,459	0,01074	88,40	0,9494	54,8260	124,839	0,0000881	0,010998	4985	545
1,40	60,20	0,425	0,00921	88,80	0,8178	59,3832	131,242	0,0000763	0,010014	5930	643
1,50	64,65	0,396	0,00799	89,20	0,7127	63,9373	137,645	0,0000670	0,009222	6932	749
1,60	69,12	0,370	0,00698	89,60	0,6254	68,4946	144,038	0,0000590	0,008498	8060	863
1,70	73,61	0,348	0,00617	90,00	0,5553	73,0547	150,441	0,0000527	0,007928	9215	
									Summa, d. i. $l = 4620^m$		

Es folgt hiernach ohne Weiteres, welcher Auflösungsmethode man den Vorzug geben wird.

[§. 136.]

Ein etwas allgemeinerer Ausdruck wie der des vorigen Paragraphen läßt sich durch directe Integration von IV, §. 134, unter der Voraussetzung erhalten, daß i und k constante Größen sind.

Zuerst kann man nämlich schreiben:

$$i \,.\, dl = \frac{y^3 - \frac{Q^2}{gb^2}}{y^3 - \frac{pQ^2}{ib^3k^2}} \,.\, dy, \text{ oder auch}$$

$$i \,.\, dl = \left[1 + \frac{\frac{pQ^2}{ib^3k^2} - \frac{Q^2}{gb^2}}{y^3 - \frac{pQ^2}{ib^3k^2}} \right] dy.$$

Ferner setze man $\frac{pQ^2}{ib^3k^3} = D^3$, $\frac{Q^2}{gb^2} = E^3$, wo D und E als bekannte Werthe anzunehmen sind, so daß erhalten wird:

$$i \,.\, dl = \left[1 + \frac{D^3 - E^3}{y^3 - D^3} \right] dy,$$

hieraus aber, wenn Y wieder stromaufwärts die (größte) Tiefe am Ende der Strecke l bezeichnet:

$$i \,.\, l = (y - Y) + (D^3 - E^3) \int_Y^y \frac{dy}{y^3 - D^3}.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche erhält man aber

$$\frac{1}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2(y - D)} - \frac{2D + y}{3D^2(y^2 + Dy + D^2)},$$

daher

$$i \,.\, l = (y - Y) + \frac{D^3 - E^3}{3D^2} \int_Y^y \frac{dy}{y - D} - \frac{D^3 - E^3}{3D^2} \int_Y^y \frac{(2D + y) \,.\, dy}{(y^2 + Dy + D^2)},$$

so wie nach vollständiger Ausführung der Integration:

$$\text{I.} \quad l = \frac{y - Y}{i} + \frac{D^3 - E^3}{3 \,.\, i \,.\, D^2} \left\{ \tfrac{1}{2} \, lgnt \left[\left(\frac{y - D}{Y - D} \right)^3 \frac{Y^3 - D^3}{y^3 - D^3} \right] + \right.$$

$$\left. \tfrac{1}{3} \text{ arc.} \left[tg = \frac{D(Y - y)\sqrt{3}}{D(2D + Y) + y(2Y + D)} \right] \right\}. \; ^{*})$$

---

*) Es ist $\int \frac{dy\,(2D + y)}{y^2 + Dy + D^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy\,(2y + D)}{y^2 + Dy + D^2} + \frac{1}{2} \int \frac{3D \,.\, dy}{y^2 + Dy + D^2}$, ferner:

Beispiel. Am Hamelner Wehre maß Funk *) die Wassertiefe der Weser 9,497 Fuß, während 3300 Cubikfuß Wasser über dasselbe flossen. Ferner betrug die Wassertiefe des natürlichen (nicht gestauten) Flusses, da wo die Bewegung (ziemlich) gleichförmig war 2,40 Fuß und die mittlere Geschwindigkeit $v = 2{,}94$ Fuß, ferner war die Flußbreite an letzterer Stelle 4676,9 Fuß und das Gefälle pr. Längeneinheit $\frac{1}{3253}$. Es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts die Wassertiefe 7,4 Fuß betrug?

$$\int \frac{dy\,(2y + D)}{y^2 + Dy + D^2} = \text{lgnt}\,(y^2 + Dy + D^2) + \text{Const.}, \text{ so wie}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + Dy + D^2} = \frac{2}{D\sqrt{3}}\,\text{arc.}\left(tg = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) + \text{Const.}$$

(In letzterem Falle zur Integration $y = u - \frac{D}{2}$ gesetzt.)

$$\text{Daher} \int \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2}\,\text{lgnt}\,(y - D) - \frac{1}{6D^2}\,\text{lgnt}\,(y^2 + Dy + D^2) -$$

$$\frac{1}{D^2\sqrt{3}}\,\text{arc.}\left(tg = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) + \text{Const.}$$

oder auch

$$\int \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2}\,\text{lgnt}\,(y - D) - \frac{1}{3D^2}\,\text{lgnt}\,\sqrt{y^2 + Dy + D^2} -$$

$$\frac{1}{D^2\sqrt{3}}\,\text{arc.}\left(tg = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) + \text{Const.}$$

Daher mit Beachtung der Grenzen:

$$\int_Y^y \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2}\left\{\text{lgnt}\,\frac{y - D}{Y - D}\,\frac{\sqrt{Y^2 + DY + D^2}}{\sqrt{y^2 + Dy + D^2}} -\right.$$

$$\left.\sqrt{3}\left[\text{arc.}\left(tg = \frac{2y + D}{D\sqrt{3}}\right) - \text{arc.}\left(tg = \frac{2Y + D}{D\sqrt{3}}\right)\right]\right\}$$

oder nach fernerer Zusammenziehung und mit Rücksicht auf die Form:

$$\text{arc.}\left(tg = \frac{m}{p}\right) - \text{arc.}\left(tg = \frac{n}{q}\right) = \text{arc.}\left\{tg = \frac{mq - np}{pq + mn}\right\}:$$

$$\int_Y^y \frac{dy}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2}\left\{\tfrac{1}{2}\,\text{lgnt}\left(\frac{y - D}{Y - D}\right)^3\left(\frac{Y^3 - D^3}{y^3 - D^3}\right)\right.$$

$$\left.\sqrt{3}\;\text{arc.}\left[tg = \frac{D(Y - y)\sqrt{3}}{D(2D + Y) + y(2Y + D)}\right]\right\}.$$

*) Darstellung der wichtigsten Lehren der Hydrotechnik etc. Seite 135

Auflösung. Es ist hier, mit Bezug auf I: $Q = 3300$; $v = 2{,}94$; $a = \frac{Q}{v} = 1122^{\square'}{,}4$; $b = 467{,}69$; $p = 467{,}69 + 4{,}8 = 472{,}49$; $i = \frac{1}{2253}$, $k = 97{,}847$, $g = 31{,}25$, und daher:

$$D^3 = \frac{pQ^2}{ib^3k^2} = 11{,}56,$$
$$D^2 = 5{,}114,$$
$$D = 2{,}261.$$

Ferner: $E^3 = \frac{Q^2}{gb^2} = 1{,}59312$; $Y = 2{,}4$; $y = 7{,}097$.

Daher also:

$$= \frac{9{,}497 - 7{,}400}{\frac{1}{2253}} + \frac{11{,}56 - 1{,}593}{3 . \frac{1}{2253} . 5{,}114} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\, lgnl \left[\left(\frac{9{,}497 - 2{,}261}{7{,}40 - 2{,}261} \right)^3 \left(\frac{405{,}22 - 11{,}56}{856{,}56 - 11{,}56} \right) \right] - \\ - \sqrt{3} \left[\text{arc.} \left(lg = \frac{2{,}261 . 2{,}097 . 1{,}732}{26{,}956 . 162{,}028} \right) \right] \end{array} \right\};$$

$$l = 2253 \left\{ 2{,}097 + 0{,}65 \left[\tfrac{1}{2} (0{,}263) - 1{,}732 . \text{arc.}\, 2^0\, 30' \right] \right\};$$
$$l = 2253\, (2{,}097 + 0{,}0367) = 2253 . 2{,}1337;$$
$$l = 4807 \text{ Fuß. *)}$$

Im vierten Kapitel, bei der Berechnung der sogenannten Stauweiten, kommen wir (§. 146) auf dies Beispiel zurück, wobei ein außerordentlich kurzes Verfahren zur Auflösung angewandt werden wird.

Viertes Kapitel.

Stauhöhe und Stauweite bei Einbauen in Canälen und Flüssen.

§. 137.

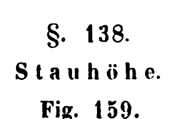
Jede Beschränkung, Erhöhung oder Einbau im Bette eines Canales oder Flusses, erzeugt eine Erhebung (einen Aufstau) der Schichten und beziehungsweise der Oberfläche des fließenden Wassers. Die Größe dieser Erhebung über den natürlichen Wasserspiegel nennt man die Stauhöhe und die Länge, auf welche sie sich stromaufwärts fortpflanzt, die Stauweite.

---

*) Zum Vergleiche betreffender Formeln ist dies Zahlenbeispiel absichtlich der Maschinenencyclopädie, Bd. 2, S. 190, entlehnt, woselbst Weisbach, aus einer Gleichung anderer Form, $l = 4826$ Fuß berechnet. Dabei ist auch $b = 467{,}69$ und nicht wie auf voriger Seite $= 4676{,}9$ Fuß.

Hier kann nur von regelrechten, künstlichen Einbauen im Wasserbette die Rede sein, welche sich entweder über die ganze Breite oder nur über einen Theil derselben erstrecken. Zur ersten Classe gehören die dichten Wehre, bei denen man wieder vollkommene und unvollkommene Ueberfall-Wehre, so wie Durchlaß- und Schleusenwehre unterscheidet; zur zweiten Classe rechnet man die lichten Wehre, Buhnen, Parallelwerke und Brücken, wenn die Pfeiler der letzteren in den Strom eingebaut sind.

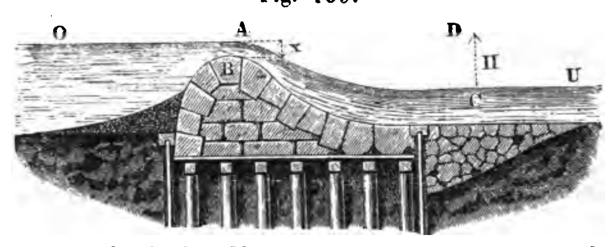
Im Nachstehenden beantworten wir die Fragen, welche sich auf Berechnung der Stauhöhe und Stauweite aller dieser Einbaue beziehen.



§. 138.

Stauhöhe.

Fig. 159.



Stauhöhe bei vollkommenen Ueberfallswehren, d. h. bei Wehren, woselbst der Unterwasserspiegel U, Fig. 159, stets unter der Wehrkrone (dem Fachbaume) B liegt.

Es sei $CD = H$ die durch das Wehr erzeugte oder hervorzubringende Stauhöhe, oder die Differenz der Wasserspiegel U hinter und O vor dem Wehre, ferner b die Breite der Wehrkrone (Fachbaumlänge), so wie $\overline{AB} = x$ die Tiefe der Ueberfallsstelle B unter dem gestauten aber ungesenkten Wasserspiegel O, und endlich c die mittlere Geschwindigkeit im größten Stauprofile vor dem Wehre.

Sodann erhält man zunächst nach §. 102, für die pr. Secunde über das Wehr fließende Wassermenge $= q$:

$$(1) \quad q = \tfrac{2}{3}\,\mu b \sqrt{2g}\left\{\left(x + \frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\},$$

oder wenn c klein genug ist:

$$(2) \quad q = \tfrac{2}{3}\,\mu b x \sqrt{2gx}.$$

Verlangt man nun in einem bestimmten Falle, die zur Erzeugung der Stauhöhe H erforderliche Höhe $= e$ der Wehr-

krone über den ungestauten Wasserspiegel d. i. die Größe $H - x$ zu kennen, so ergiebt sich aus (1)

$$\text{I.}\quad e = H + \frac{c^2}{2g} - \left\{\left(\frac{3q}{2\mu b\sqrt{2g}}\right) + \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}},$$

so wie die Wehrhöhe $= k$ über der Sohle des Flußbettes, wenn t die Tiefe des natürlichen, ungestauten Stromes ist:

$$\text{II.}\quad k = t + H + \frac{c^2}{2g} - \left\{\left(\frac{3q}{2\mu b\sqrt{2g}}\right) + \left(\frac{c^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}}.$$

Ist dann B die natürliche Flußbreite vor dem Wehre, im größten Stauprofile, wobei $B \gtreqless b$ sein kann, so ist

$$c = \frac{Q}{B(t+H)},$$

wenn Q die Wassermenge des Flusses oberhalb bezeichnet, die gleich q ist, sobald vor dem Wehre keine Wasserabführung erfolgt.

Nach Eytelwein *) soll man für Ueberfälle mit Flügelwänden und wenn die Ueberfallskante gehörig abgerundet ist, $\mu = 0{,}855$ oder $\frac{2}{3}\mu = 0{,}570$ nehmen. Bei Ueberfällen ohne Flügelwände räth derselbe Hydrauliker $\mu = 0{,}632$ zu setzen. Nach Weisbach's Versuchen soll sich, für den ersten Fall, $\mu = 0{,}8$ ergeben haben.

Beispiel. In einem Flusse, welcher 40 Fuß Breite und 5 Fuß mittlere Tiefe hat und pr. Secunde 300 Cubikfuß Wasser abführt, will man ein vollkommenes Ueberfallswehr von 50 Fuß Breite an einer Stelle einbauen, woselbst kein grösserer Stau als $2\frac{1}{2}$ Fuß gestattet wird, aber 74 Cubikfuß Wasser pr. Secunde in einen Seitengraben zum Beaufschlagen eines Wasserrades abgeführt werden sollen. Man soll die Höhe der Wehrkrone über der Flußsohle berechnen.

Auflösung. Zuerst ist hier, um c zu berechnen, $Q = 300$, $B = 40$, $t = 5$, $H = 2\frac{1}{2}$, also:

$$c = \frac{300}{40(5+2\frac{1}{2})} = 1',$$

und wenn $g = 33{,}6$ Fuß (hannov.)

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2.33{,}6} = 0{,}0148,$$

daher wenn man überdies Flügelwände voraussetzt und $\mu = 0{,}855$ nimmt, ferner beachtet, daß $q = 300 - 74 = 226\,c'$ ist, nach II:

*) Handbuch der Mechanik und Hydraulik, 2. Aufl., S. 115 u. 181.
**) Ing. Mechanik, 2. Auflage, Bd. 2, S. 174.

$$k = 5 + 2{,}5 + 0{,}0148 - \left\{\frac{3.226}{2.0{,}855.50.\sqrt{2.33{,}6}} + (0{,}0148)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}}$$

$$k = 7{,}5148 - (0{,}967 + 0{,}0018)^{\frac{2}{3}}$$

$$k = 6{,}536 \text{ Fuß.}$$

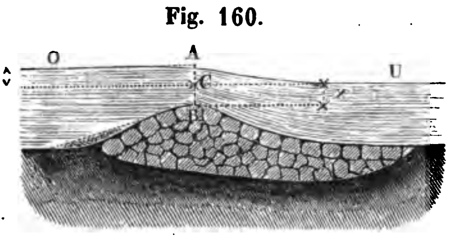
Ohne Rücksicht auf c würde man erhalten haben:

$$k = 6{,}522 \text{ Fuß.}$$

§. 139.

Stauhöhe bei unvollkommenen Ueberfallswehren (Grundwehren), d. h. bei solchen Wehren, wo der Wasserspiegel des Unterwassers stets über der Wehrkrone liegt.

Fig. 160.



Bezeichnet x die Tiefe der Wehrkrone B, Fig. 160, unter dem ursprünglichen, ungestauten Wasserspiegel und H die Stauhöhe, d. h. die Differenz der Wasserspiegel O und U, so erhält man zuvörderst unmittelbar aus II. §. 103, woselbst die Geschwindigkeit c des ankommenden Wassers vernachlässigt ist, für die pr. Secunde über das Wehr fließende Wassermenge $= Q$:

$$\text{I.} \quad Q = \tfrac{2}{3}\,\mu_1 bH\sqrt{2gH} + \mu_2 bx\sqrt{2gH}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\text{II.} \quad x = \frac{Q}{\mu_2 b\sqrt{2gH}} - \frac{2}{3}\,\frac{\mu_1}{\mu_2}.H.$$

Setzt man mit Weisbach *) $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}8$, so folgt

$$(1) \quad x = \frac{Q}{0{,}8.b\sqrt{2gH}} - 0{,}66.H.$$

Nimmt man dagegen mit Redtenbacher **) $\mu_2 = 0{,}62$ und $\mu_1 = 0{,}855$, so folgt

$$(2) \quad x = \frac{Q}{0{,}62.b\sqrt{2gH}} - 0{,}92\,H.$$

*) a. a. O. Seite 174.

**) Resultate für den Maschinenbau, 3. Aufl., Seite 120, Nr. 147.

Die Höhe k der Wehrkrone über dem Flußbette berechnet sich sonach, wenn t wiederum die natürliche, ungestaute Wassertiefe des Flusses ist, zu

$$k = t - x, \text{ d. i.}$$

$$\text{III.} \quad k = t - \frac{Q}{\mu_2 b \sqrt{2gH}} + \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{\mu_2} H.$$

Beispiel. Es ist die Höhe k eines Grundwehres über der Flußsohle unter der Voraussetzung zu berechnen, daß $t = 4$ Fuß, $b = 30$ Fuß, $H = 4$ Fuß und die pr. Sec. abfließende Wassermasse 1314 Cubikfuß ist.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, daß $\sqrt{2g} = 8{,}197$ (hannov.) oder genau genug $\sqrt{2g} = 8{,}2$ ist, erhält man aus (1)

$$x = \frac{1314}{0{,}8 . 30 . 8{,}2 . \sqrt{4}} - 4.0{,}66$$

$$x = 3{,}33 - 2{,}64 = 0{,}690$$

und folglich als Wehrhöhe

$$k = 4 - 0{,}690 = 3{,}31 \text{ Fuß}.$$

Dagegen findet man aus (2)

$$x = \frac{1314}{0{,}62 . 30 . 8{,}2 \sqrt{4}} - 4 . 0{,}92$$

$$x = 4{,}307 - 3{,}680 = 0{,}672 \cdot$$

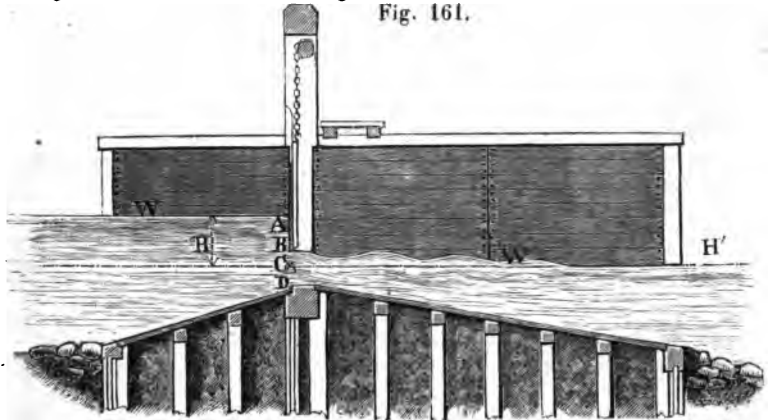
und weiter:

$$k = 4 - 0{,}627 = 3{,}373 \text{ Fuß}.$$

§. 140.

Stau bei Durchlaß- oder Schleusenwehren, Fig. 161. Hierbei sind folgende drei Fälle zu unterscheiden.

Fig. 161.



Erster Fall. Der Wasserspiegel W' des ungestauten Wassers geht durch die Ausflußöffnung BD, oder was dasselbe ist, das Niveau des Unterwassers liegt bei C unterhalb der oberen Kante B der Schützenmündung, so daß ein Theil Wasser (durch BC) frei in die Luft strömt, ein anderer Theil unter Wasser (durch CD) ausfließt.

Ist hierbei $\overline{BC} = e_1$, $\overline{CD} = e_2$ und sind μ_1 und μ_2 die betreffenden Ausflußcoefficienten, ferner b die lichte Weite der rectangulären Mündung und endlich H die Stauhöhe, oder die Differenz zwischen dem Oberwasserspiegel W und dem Unterwasserspiegel W', so erhält man für die durch BC pr. Secunde strömende Wassermenge $= q_1$:

$$q_1 = \mu_1 b e_1 \sqrt{2g\left(H - \tfrac{1}{2} e_1\right)},$$

so wie für das durch $\overline{CD}$ fließende Wasser $= q_2$:

$$q_2 = \mu_2 b e_2 \sqrt{2gH}.$$

Die Gesammtmenge $= Q = q_1 + q_2$ ist sonach:

$$\text{I.} \quad Q = b\sqrt{2g}\left\{\mu_1 e_1 \sqrt{\left(H - \tfrac{1}{2} e_1\right)} + \mu_2 e_2 \sqrt{H}\right\},$$

wobei die Geschwindigkeit $= c$, womit das Wasser vor der Mündung ankommt, abermals vernachlässigt ist.

Mit Berücksichtigung der Letzteren erhält man:

$$\text{II.} \quad Q = b\sqrt{2g}\left\{\mu_1 e_1 \sqrt{\left(H - \tfrac{1}{2} e_1\right) + \frac{c^2}{2g}} + e_2 \sqrt{H + \frac{c^2}{2g}}\right\}.$$

Zweiter Fall. Die Mündung $\overline{BD}$ ist ganz unter Wasser gesetzt. (Man sehe auch Fig. 101.) Ist hierbei $b(e_1 + e_2) = \omega$ der Flächeninhalt von BD, ferner A der Inhalt des Wasserprofils in $\overline{AB}$, unmittelbar vor der Mündung, so läßt sich der Ausfluß so betrachten, als träte das Wasser durch den Querschnitt A in ein Gefäß und durch eine Mündung vom Inhalte $\alpha\omega$ aus demselben, so daß man die betreffende Geschwindigkeit $= v$ in der Mündung $\overline{BD}$, nach I. S. 128 erhält:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\alpha^2 \omega^2}{A^2}}},$$

wo H die Differenz zwischen Ober- und Unterwasserspiegel, d. i. **die Stauhöhe** bezeichnet.

Da ferner $v = \frac{Q}{\mu\omega}$, so ergiebt sich auch aus (1)

$$\text{II.} \quad H = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{\mu^2\omega^2} - \frac{1}{A^2}\right] \text{*)}$$

oder, wenn t die ungestaute Wassertiefe bezeichnet und wegen $A = b(H+t)$:

$$\text{II}^a. \quad H = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{\mu^2\omega^2} - \frac{1}{b^2(H+t)^2}\right],$$

ferner aus II:

$$\text{II}^b. \quad \omega = \frac{Q}{\mu\sqrt{2gH + \left(\frac{Q}{A}\right)^2}}.$$

Dritter Fall. Der Fachbaum des Schleusenwehres liegt über dem Spiegel des Unterwassers.

In diesem Falle ist gleichfalls von II. und II^a. Gebrauch zu machen, nur daß dabei H die Druckhöhe über der Mitte der Schützenöffnung, bis zum Oberwasserspiegel darstellt. **)

Beispiel. Wie hat man den Querschnitt der Schützenöffnung bei einem Schleusenwehre zu nehmen, wenn die Mündung ganz unter Wasser steht, die gestattete Stauhöhe $0^m,50$ betragen darf, die Tiefe des ungestauten Wassers $0^m,8$, ferner die Breite $4^m,0$ und endlich die mittlere Geschwindigkeit im Profile von letzteren Dimensionen $0^m,75$ ist?

Auflösung. Wegen aufgehobener Contraction an der unteren Kante der Ausflußöffnung, nehmen wir $\mu = 0,650$, so wie den gegebenen Werthen entsprechend:

$$Q = 4 \,.\, 0,8 \,.\, 0,75 = 2^{c.m},40; \quad H + t = 0,5 + 0,8 = 1^m,3.$$

$A = 4 \,.\, 1,3 = 5^{\square m},2$, weshalb aus II^b folgt:

$$\omega = \frac{2,4}{0,65\sqrt{2 \,.\, 9,81 \,.\, 0,5 + \left(\frac{2,4}{5,2}\right)^2}} = 1^{\square m},16.$$

*) Diese Gleichung läßt sich auch unmittelbar aus I., §. 133, ableiten, wenn man daselbst $Av + Bv^2$ gleich Null setzt, ein Umstand, der zugleich Anlaß zu der Ansicht gegeben hat, man könne ohne Weiteres das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte auf Fälle gegenwärtiger Art, d. h. auf Bewegungen wo plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, anwenden.

**) Die gute Uebereinstimmung dieser Formeln mit der Erfahrung zeigen auch Lesbros: Experiences hydrauliques etc. Paris 1851, pag. 195.

$$\text{Daher } \Delta l = \frac{32 \,.\, a - \frac{v^2}{2g}(83{,}2 + 4y)}{(41{,}6 + 64{,}03 \,.\, y)(Av + Bv^2)} \,.\, \Delta y.$$

Von $y = 0_m{,}4$ anfangend und um $0^m{,}1$ fortschreitend hat Belanger nach und nach folgende Tabelle berechnet, welche, mit Rücksicht auf vorstehenden Ausdruck für Δl, von selbst verständlich ist.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
y	$32 \,.\, a$	$v = \frac{25{,}6}{32 . a}$	$\frac{v^2}{2g}$	$83{,}2 + 4y$	Producte der Columnen 4 und 5 $= P$	$32a - P$	$32p = 41{,}6 + 64{,}03y$	$Av + Bv^2$	Nenner des Ausdruckes $\frac{\Delta l}{\Delta y}$ oder Product aus 8 und 9	$\frac{\Delta l}{\Delta y}$ oder Quotient aus 7 durch 10	Abstände der auf einander folgenden Tiefen
$0^m{,}40$	16,80	1,523	0,1182	84,80	10,0234	6,7766	67,212	0,0008848	0,059469	114	23^m
0,50	21,95	1,216	0,0753	85,20	6,4156	14,6344	73,615	0,0005701	0,041968	349	50
0,60	25,32	1,011	0,0521	85,60	4,4598	20,8602	80,018	0,0003982	0,031863	655	84
0,70	29,61	0,865	0,03814	86,00	3,2800	26,3300	86,421	0,0002945	0,025451	1035	126
0,80	33,92	0,755	0,02906	86,40	2,5108	31,4092	92,824	0,0002267	0,021043	1493	176
0,90	38,25	0,669	0,02281	86,80	1,9799	36,2701	99,227	0,0001798	0,017841	2033	234
1,00	42,60	0,601	0,01841	87,20	1,6054	40,9946	105,630	0,0001466	0,015485	2647	299
1,10	46,97	0,545	0,01514	87,60	1,3263	45,6437	112,033	0,0001218	0,013646	3345	373
1,20	51,36	0,498	0,01242	88,00	1,0930	50,2670	118,436	0,0001027	0,012163	4133	455
1,30	55,77	0,459	0,01074	88,40	0,9494	54,8260	124,839	0,0000881	0,010998	4985	545
1,40	60,20	0,425	0,00921	88,80	0,8178	59,3832	131,242	0,0000763	0,010014	5930	643
1,50	64,65	0,396	0,00799	89,20	0,7127	63,9373	137,645	0,0000670	0,009222	6932	749
1,60	69,12	0,370	0,00698	89,60	0,6254	68,4946	144,038	0,0000590	0,008498	8060	863
1,70	73,61	0,348	0,00617	90,00	0,5553	73,0547	150,441	0,0000527	0,007928	9215	
									Summa, d. i. $l = 4620^m$		

Es folgt hiernach ohne Weiteres, welcher Auflösungsmethode man den Vorzug geben wird.

[§. 136.]

Ein etwas allgemeinerer Ausdruck wie der des vorigen Paragraphen läßt sich durch directe Integration von IV, §. 134, unter der Voraussetzung erhalten, daß i und k constante Größen sind.

Zuerst kann man nämlich schreiben:

$$i.dl = \frac{y^3 - \frac{Q^2}{gb^2}}{y^3 - \frac{pQ^2}{ib^3k^2}} . dy, \text{ oder auch}$$

$$i.dl = \left[1 + \frac{\frac{pQ^2}{ib^3k^2} - \frac{Q^2}{gb^2}}{y^3 - \frac{pQ^2}{ib^3k^2}} \right] dy.$$

Ferner setze man $\frac{pQ^2}{ib^3k^3} = D^3$, $\frac{Q^2}{gb^2} = E^3$, wo D und E als bekannte Werthe anzunehmen sind, so daß erhalten wird:

$$i.dl = \left[1 + \frac{D^3 - E^3}{y^3 - D^3} \right] dy,$$

hieraus aber, wenn Y wieder stromaufwärts die (größte) Tiefe am Ende der Strecke l bezeichnet:

$$i.l = (y - Y) + (D^3 - E^3) \int_Y^y \frac{dy}{y^3 - D^3}.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche erhält man aber

$$\frac{1}{y^3 - D^3} = \frac{1}{3D^2(y - D)} - \frac{2D + y}{3D^2(y^2 + Dy + D^2)},$$

daher

$$i.l = (y - Y) + \frac{D^3 - E^3}{3D^2} \int_Y^y \frac{dy}{y - D} - \frac{D^3 - E^3}{3D^2} \int_Y^y \frac{(2D + y).dy}{(y^2 + Dy + D^2)},$$

so wie nach vollständiger Ausführung der Integration:

$$\text{I.} \quad l = \frac{y - Y}{i} + \frac{D^3 - E^3}{3.i.D^2} \left\{ \tfrac{1}{2}\, lgnt \left[\left(\frac{y - D}{Y - D} \right)^3 \frac{Y^3 - D^3}{y^3 - D^3} \right] + \right.$$

$$\left. \tfrac{1}{3}\, \text{arc.} \left[tg = \frac{D(Y - y)\sqrt{3}}{D(2D + Y) + y(2Y + D)} \right] \right\}. \text{*)}$$

---

*) Es ist $\int \frac{dy\,(2D + y)}{y^2 + Dy + D^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy\,(2y + D)}{y^2 + Dy + D^2} + \frac{1}{2} \int \frac{3D.dy}{y^2 + Dy + D^2}$, ferner:

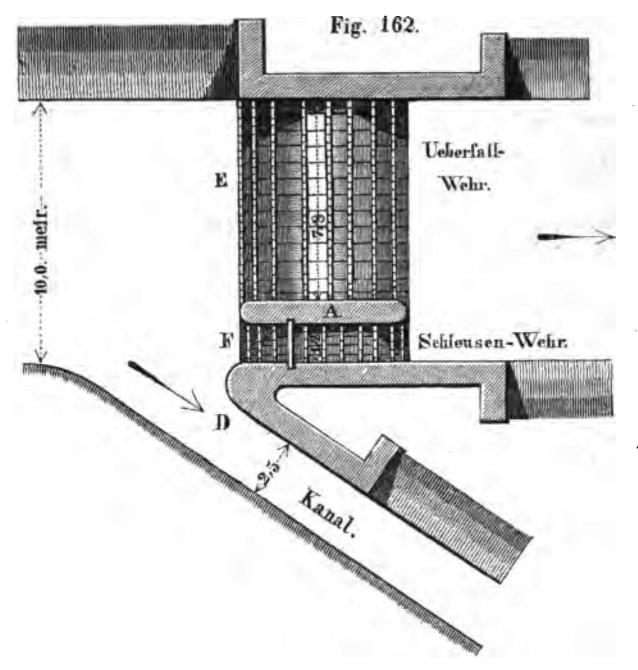


Fig. 162.

Schleusenwehr *F*, Fig. 162[c], ganz geschlossen ist, so folgt, wenn x die Tiefe der Wehrkrone *E* unter dem gestauten Wasserspiegel bezeichnet und endlich y die lichte Weite des Schleusenwehres darstellt, nach §. 138:

$$(1)\quad 0{,}5 = 0{,}57\,(9 - y)\,x\sqrt{2gx} \text{ (bei Kleinwasser).}$$

Dagegen ist beim Hochwasser **über den Ueberfall** zu leiten die Wassermenge:

$$(2)\quad 0{,}57\,(9 - y)\,(x + 0{,}24)\sqrt{2g\,(x + 0{,}24)},$$

so wie gleichzeitig durch das ganz geöffnete Schleusenwehr, Fig. 162[c], die Wassermenge:

$$(3)\quad 0{,}57\,.\,y\,(0{,}903 + 0{,}24 - 0{,}43)\sqrt{2g\,(0{,}903 + 0{,}24 - 0{,}43)}.$$

Die Summe von (2) und (3) muß aber 7,0 — 1,5 = 5,5 Cubikmeter betragen, weshalb erhalten wird:

$$5{,}5 = 0{,}57\,(9 - y)\,(x + 0{,}24)\sqrt{2g\,(x + 0{,}24)} + 0{,}57\,y\,(0{,}713)\sqrt{2g\,(0{,}713)}.$$

Fig. 162a.

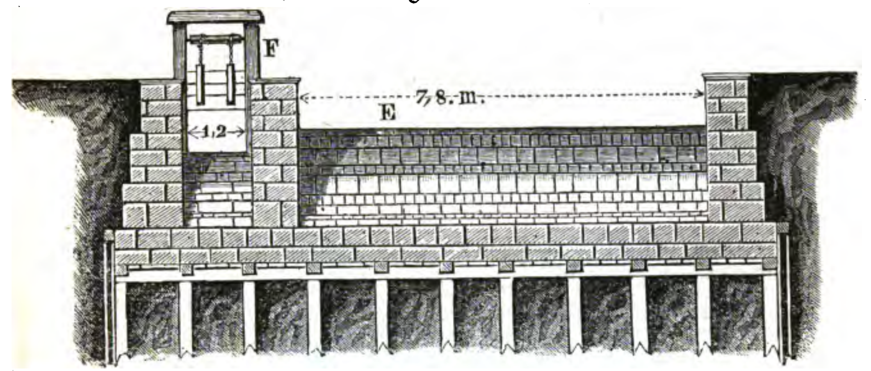


Fig. 162b.

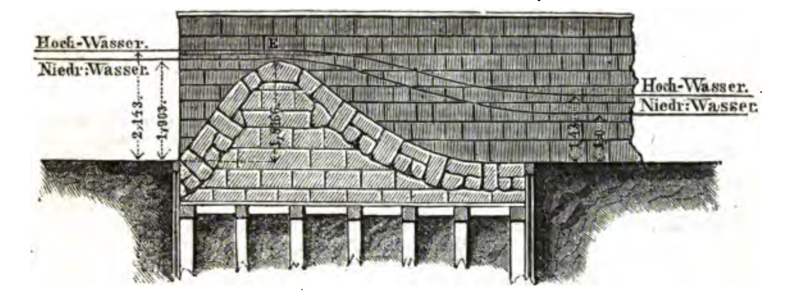
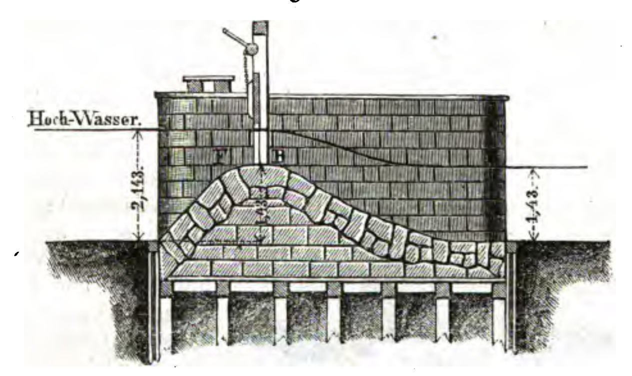


Fig. 162c.



Substituirt man hier: $9 - y = \frac{0,5}{0,57 . x\sqrt{2gx}}$ und

(5) $y = 9 - \frac{0,5}{0,57 . x\sqrt{2gx}}$ aus (1), so folgt

$$5,5 = \frac{0,5}{x\sqrt{2gx}}(x+0,24)\sqrt{2g(x+0,24)} + 9.0,57.0,713\sqrt{2g.0,713} - \frac{0,57 . 0,5(0,713)\sqrt{2g(0,713)}}{0,57 . x\sqrt{2gx}}.$$

Hier mit $x\sqrt{x}$ multiplicirt, $\sqrt{2g} = 4,429$ gesetzt und zusammengezogen giebt:

$$5,5x\sqrt{x} = (0,5.x+0,120)\sqrt{x+0,24} + 13,6797.x\sqrt{x} - 0,300866,$$

oder $-8,17976.x\sqrt{x} = (0,5.x+0,12)\sqrt{x+0,24} - 0,300866,$

so wie hieraus I. $x = 0^{m},0864$.

Letzterer Werth in (5) liefert endlich:

II. $y = 9,0 - 7,8 = 1^{m},2$.

Die Breite des Ueberfallwehres ist sonach $7^{m},8$, eine Größe, wonach auch unsere Figuren 162 bis 162^{c} in bereits oben bemerktem, verjüngten Maßstabe aufgetragen sind.

Bei Hochwasser geht daher über das Wehr ein Wasserquantum pr. Secunde von:

$0,57.7,8(0,0864+0,24)\sqrt{2g(0,0864+0,24)} = 3,6727$ Cub. Meter,

so wie gleichzeitig durch das geöffnete Schleusenwehr:

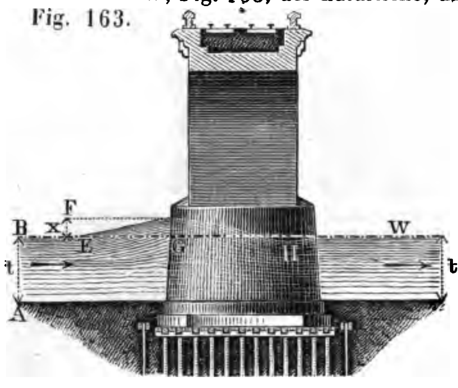
$5,5 - 3,6727 = 1,8273$ Cub. Meter.

§. 142.

Stauhöhe bei Brücken, Buhnen und Schleusen.

Es sei *BW*, Fig. 163, der natürliche, ungestaute Wasserspiegel, die größte Erhebung *G* des letzteren beim Eingange in die Brücke und die größte Senkung in *H*, während sich noch andere geringere Senkungen und Erhebungen in immer abnehmenden Wellen, außerhalb der Pfeiler, stromabwärts, bis zur Wiederherstellung des ursprünglichen Wasserspiegels wiederholen.

Fig. 163.



Nimmt man hier die betreffenden Staugesetze jenen bei den Grundwehren §. 139 gleich an, setzt die ungestaute Wassertiefe $\overline{AB} = t$, die Stauhöhe $\overline{EF} = x$, bezeichnet mit B die natürliche Flußbreite und mit b die lichte Weite zwischen den Brückenpfeilern (oder dem Buhnenkopfe und dem gegenüberliegenden Ufer), so erhält man, wenn außerdem $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ gesetzt wird:

$$\text{I.} \quad Q = \mu b \sqrt{2g} \left\{ \tfrac{2}{3} \left(x + \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3} \left(\frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} + t \sqrt{\left(x + \frac{c^2}{2g} \right)} \right\},$$

oder genau genug:

$$\text{II.} \quad Q = \mu b \sqrt{2g} \left\{ (\tfrac{2}{3} x + t) \sqrt{x + \frac{c^2}{2g}} \right\}.$$

Hierbei ist $c = \frac{Q}{B(x+t)}$ oder, für die meisten Fälle genau genug: $c = \frac{Q}{Bt}$ und $\frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{Bt} \right)^2$, welcher letzterer Werth $= k$ gesetzt werden mag.

Zur Berechnung der Stauhöhe $= x$ reducirt man leicht aus II:

$$\text{III.} \quad 0 = x^3 + (k + 3t) x^2 + (\tfrac{9}{4} t^2 + 3tk) x - \left(\tfrac{9}{8} \frac{Q^2}{\mu^2 b^2 g} - \tfrac{9}{4} k t^2 \right).$$

Nach Navier *) hat man bei Brückenöffnungen zu nehmen:

$\mu = 0{,}95$, wenn sich die Pfeiler in Halbkreisen oder spitzen Winkeln endigen;

$\mu = 0{,}90$, wenn der Horizontalschnitt des Vordertheils einen stumpfen Winkel bildet;

$\mu = 0{,}7$, wenn die Anfänger der Bögen in's Wasser tauchen, wie dies bei vielen kleinen Brücken der Fall ist.

Eytelwein **) räth zu nehmen:

$\mu = 0{,}954$ bei Brückenpfeilern mit spitzen Vordertheilen;

$\mu = 0{,}855$ bei Pfeilern mit geraden Vordertheilen.

Die Hintertheile der Brückenpfeiler sind abzurunden oder zuzuschärfen, will man beim Austritte aus den Pfeilern plötzliche Geschwindigkeitsveränderungen und demnach Verluste an lebendiger Kraft vermeiden, so wie gleichzeitig wirbelnde Bewegungen verhindern, welche nachtheilig auf das Grundbett einwirken.

Es sind diese Rücksichten um so nothwendiger, als die Geschwindigkeit, womit das Wasser aus den Pfeilern heraustritt, unter allen Umständen größer ist, als die Eintrittsgeschwindig-

---

*) Résumé des Leçons etc. Deuxième Partie, p. 108.

**) Hydraulik, 2. Auflage, §. 142.

keit, wodurch zugleich stromabwärts eine größere Neigung des Wasserspiegels erzeugt wird, so wie eine geringere Wassertiefe und ein leichteres Angreifen des Bettes und der Bauwerke, welche letzteres einschließen.

Zusatz 1. Belanger *) und d'Aubuisson **) und nach ihnen die Meisten der neueren französischen Schriftsteller benutzen zur Berechnung von Stauhöhen in den fraglichen Fällen den I. §. 133 entwickelten Ausdruck, vernachlässigen jedoch (der betreffenden kurzen Strecke wegen) den Bettwiderstand und setzen, wenn x wiederum die Stauhöhe, ferner v und v_0 beziehungsweise die größte und kleinste Geschwindigkeit der Staustelle bezeichnet:

$$\text{IV.} \quad x = \frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g},$$

d. h. die Stauhöhe ist gleich der Differenz der Höhen, welche den größten und kleinsten Geschwindigkeiten der Staustelle entsprechen.

Statt IV. läßt sich auch schreiben, wenn Q die pr. Secunde durch die Staustelle fließende Wassermenge darstellt und a, a_0 die Inhalte der betreffenden Profile:

$$x = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0^2}\right],$$

oder da in unserem Falle $a = \mu bt$, $a_0 = B(t + x)$ ist:

$$\text{V.} \quad x = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{(\mu bt)^2} - \frac{1}{B^2(t+x)}\right].$$

Zusatz 2. Zur Beurtheilung des praktischen Werthes unserer bis jetzt aufgestellten Formeln, benutzen wir Funk's hydrometrische Messungen an der Weserbrücke zu Minden ***), wobei die ersten acht im Jahre 1804, die neunte aber 1799 bei einer sehr hohen Ueberschwemmung vorgenommen wurden. Sämmtliche Maße sind preußische, wobei $g = 31{,}25$ Fuß, $\sqrt{2g} = 7{,}91$ ist.

Zu den betreffenden Rechnungen wandte Funk die Gleichung III an, führte dabei jedoch $\psi . t$ statt t ein, wobei ψ einen Coefficienten bezeichnet, welcher die Abnahme der Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Boden zu corrigiren soll.

---

*) Essai etc. Nr. 57.
**) Traité d'hydraulique, §. 172.
***) Hydrotechnik, Seite 131.

Die natürliche Flußbreite B ist überall = 576 Fuß, der Coefficient $\psi = 0,85$.

Nr. der Funk'schen Versuche	Ungestaute Flußtiefe $= t$ in Fußen	Wassermenge pr. Sec. $= Q$ in Cubikf.	Ausflußcoefficient*) $= \mu$	$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{Bt}\right)^2$	Summe der Brückenweite $= b$ in Fußen	Beobachtete Stauhöhe in Fußen	Berechnete Stauhöhe $= x$ in Fußen
722	4,540	1867	0,90	0,031	235	0,160	0,070
723	8,009	13972	0,90	0,243	270	0,666	0,750
724	12,396	25181	0,90	0,380	282	0,833	0,895
725	11,789	26409	0,90	0,400	291	0,944	1,005
726	10,680	23781	0,81	0,418	282	1,000	1,150
727	14,153	32208	0,81	0,474	311	1,101	1,075
728	15,618	36326	0,81	0,481	302	1,202	1,250
729	17,112	42625	0,81	0,501	306	1,222	1,325
730	17,896	76670	0,90	0,501	422	1,830	1,900

D'Aubuisson **) benutzt dieselben Versuche, um die praktische Brauchbarkeit der Formel V darzuthun (wobei 1 preußischer Fuß = 0,31385 Meter, 1 preuß. Cubikfuß = 0,0309158 angenommen ist).

Für Metermaß ist $B = 180,71$, $\frac{1}{2g} = 0,051$.

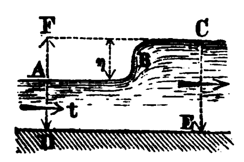
Q in Cub. Metern	b in Metern	t in Metern	μ	x in Metern beobachtet	x in Metern berechnet
58,0	73,7	1,425	0,90	0,052	0,016
432,0	94,6	2,514	0,90	0,209	0,220
779,0	88,5	3,890	0,90	0,261	0,267
817,0	91,3	3,700	0,90	0,296	0,302
735,0	91,3	3,352	0,90	0,314	0,323
996,0	97,6	4,441	0,81	0,345	0,342
1123,0	94,8	4,901	0,81	0,377	0,383
1318,0	96,0	5,371	0,81	0,384	0,426
2370	132,4	5,671	0,81	0,540	0,559

*) Die Coefficienten μ sind wegen der Bollwerke, welche die Pfeiler umgeben, wegen der verschiedenen Gestaltungen der Vorpfeiler, wegen der davor gerammten Eisbrecher und endlich wegen des Einströmens des Wassers in die Bogen bei Hochwasser schwer zu bestimmen, weswegen sie hier so angegeben sind, wie sie am besten mit den Beobachtungen stimmen. (Anmerkung von Funk.)

**) Hydraulique, p. 206.

schen Hydrauliker Bidone beobachtet*), die zwar selten oder gar nicht bei Flüssen, wohl aber bei Canälen einzutreten vermögen. Bidone fand nämlich, daß unter Umständen (bei großen Geschwindigkeiten und geringen Wassertiefen), in nicht großer Entfernung von der höchsten Staustelle, eine plötzliche Erhebung des Wasserspiegels, ein sogenannter Sprung (Wasserschwelle) $\overline{BC}$, Fig. 164, entstehen kann.

Fig. 164.



Zur Berechnung der betreffenden Stauhöhe $\overline{AF} = \eta$ läßt sich, wie Belanger**) zuerst gezeigt hat, die Gleichung IV, §. 142, und zwar in nachbemerkter Weise benutzen.

Es sei $AD = t$ die Wassertiefe stromaufwärts des Staues, t_0 die Wassertiefe im gestauten und sehr nahe bei AD liegenden Profile EC, ferner b die constante Canalbreite. Sodann hat man

$$btv = bt_0v_0,$$

oder, weil $t_0 = t + \eta$ ist, auch

$$tv = (t + \eta)\, v_0,$$

weshalb man aus dem citirten Ausdrucke erhält:

$$\eta = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{t}{t+\eta}\right)^2\right].$$

Hier auf beiden Seiten mit $\frac{(t+\eta)^2}{\eta}$ multiplicirt und reducirt, giebt endlich:

$$\text{I.} \quad \eta = \frac{v^2}{4g} - t + \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(\frac{v^2}{8g} + t\right)}.$$

Die Beschaffenheit der Aufgabe verlangt η positiv, weshalb die Bedingung erfüllt sein muß:

$$\left(t - \frac{v^2}{4g}\right) < \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(\frac{v^2}{8g} + t\right)},$$

woraus folgt:

$$t < \frac{v^2}{g},$$

d. h. die Wassertiefe muß kleiner als die doppelte Geschwindigkeitshöhe sein.

Weitere Auskunft über die Bedingung der Entstehung dieses eigenthümlichen Staues giebt die Gleichung II, §. 134, indem dort für $t = h = \frac{v^2}{g}$ die Stauweite $= l$ zu Null wird.

---

*) Mémoires de l'Academie des sciences de Turin. Tom. XXV, 1820.
**) D'Aubuisson Hydraulique, §. 169.

Folgende Tafel zeigt die bemerkenswerthe Uebereinstimmung der mittelst I. berechneten Werthe mit der Erfahrung:

Versuchsreihe	Nr.	t	v	$\frac{v^2}{2g}$	Werthe von η berechnet	Werthe von η beobachtet von Bidone	Verhältniß der beiden Werthe von η
1ste	1	0m,0470	1m,3607	0m,0944	0m,0818	0m,0814	1,005
	2	0,0472	1m,3552	0,0936	0,0809	0,0859	0,942
	3	0,0474	1,3445	0,0921	0,0792	0,0836	0,948
	4	0,0464	1,3772	0,0966	0,0845	0,0864	0,978
2te	1	0,0635	1,7031	0,1478	0,1312	0,1233	1,064
	2	0,0639	1,6930	0,1461	0,1303	0,1250	1,042
	3	0,0643	1,6832	0,1444	0,1281	0,1278	1,002
	4	0,0646	1,6733	0,1428	0,1265	0,1311	0,965
	5	0,0626	1,7286	0,1523	0,1373	0,1346	1,020
3te	1	0,0750	1,9170	0,1872	0,1696	0,1502	1,129
	2	0,0743	1,9363	0,1910	0,1739	0,1557	1,117
	3	0,0738	1,9462	0,1930	0,1762	0,1592	1,107
4te	1	0,0457	1,3876	0,0981	0,0863	0,0756	1,141
	2	0,0455	1,3934	0,0989	0,0873	0,0782	1,116
	3	0,0455	1,3934	0,0989	0,0873	0,0848	1,029
	4	0,0453	1,3994	0,0998	0,0923	0,0836	1,104

Anmerkung. Weisbach *) beobachtete diese Wasserschwellen auch in den Fällen, wo sich die Neigung des Canalbettes plötzlich ändert, und zwar entstand der Sprung stets an der Stelle, woselbst die der größeren Neigung entsprechende kleinere Wassertiefe in die der kleineren Neigung entsprechende größere Wassertiefe überging.

§. 144.

Stauweite.

Bei dem gegenwärtigen Standpunkte der wissenschaftlichen Hydraulik läßt sich die Frage hinsichtlich der Bestimmung von Stauweiten, mit einiger Zuverlässigkeit, fast allein oder doch vorzugsweise mit Hülfe der Sätze über ungleichförmige Bewegung des Wassers beantworten.

Aus den betreffenden Gleichungen [§. 134] ergeben sich zunächst ganz allgemein folgende zwei Hauptsätze über Stauweiten.

Erstens, daß die Stauweite, wenn man das vollständige Ende eines Staues im Auge hat, unendlich groß werden kann,

*) Ing.-Mechanik, Bd. 2, 2. Auflage, Seite 184.

also der gestaute Wasserspiegel eine Fläche bildet, welche sich der ursprünglichen (ungestauten) Wasseroberfläche bis in's Unendliche nähert, ohne diese jemals vollständig zu erreichen.

Zu diesem Satze gelangt man ohne Weiteres, wenn man beachtet, daß da, wo der Stau völlig beendet ist, offenbar die gleichförmige Bewegung wieder eintreten und also nach §. 120 die Bedingungsgleichung statt finden muß:

$$\frac{h}{l} = \sin\varphi = \frac{p}{a}(Av + Bv^2),$$

wonach die Gleichung I [§. 134] sofort liefert:

$$l = \infty.$$

Zweitens, daß die Stauweite auch Null werden kann. Dieser Fall tritt ein, wenn der Zähler der Gleichung II, §. 134, früher zu Null wird, als der Nenner derselben, d. h. unter der Bedingung:

$$\frac{v^2}{g} = \frac{a}{x} = t,$$

wobei t die mittlere Wassertiefe bezeichnet. Es ist also hier $\frac{dl}{dy}$ = Null, d. h. der Wasserspiegel steht an der Staustelle vertical (bildet eine sogenannte stehende Welle) oder es tritt jener Sprung (Fig. 167) ein, der bereits §. 143 betrachtet und dessen Höhe berechnet wurde.

Der erstere dieser beiden Fälle ist der gewöhnlich und am Meisten vorkommende, indem sich letzterer nur bei sehr geringen Wassertiefen und bei gleichzeitigen, großen Geschwindigkeiten ereignet.

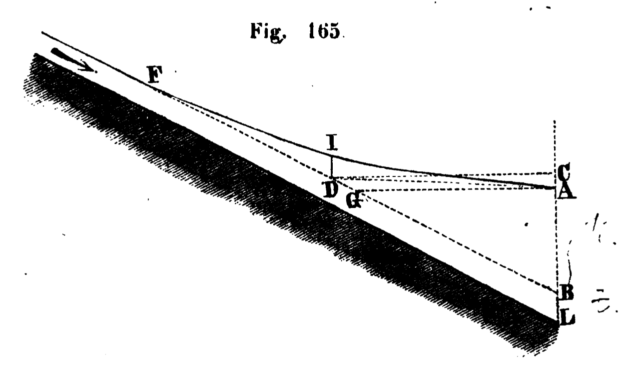
In jedem anderen Falle als diesen beiden extremen, hat man die Stauweiten entweder mittelst der allgemeinen Gleichung I [§. 136] zu berechnen, oder nimmt zu den Methoden des §. 135 seine Zuflucht, wie aus dem Nachstehenden speciell klar werden wird.

Anmerkung. Dubuat*) war der erste, welcher sich mit der Staufrage und namentlich der Gestalt des gestauten Wasserspiegels ausführlicher beschäftigte und insbesondere den Schluß machte, daß die Staucurve eine concave sein müsse und im Stromprofile nur wenig von einer Kreislinie verschieden sei. Dubuat's Behandlung des fraglichen Gegenstandes ist folgende.

Es sei $FKLB$, Fig. 165, das Längenprofil eines rectangulären Canales mit der Rösche oder dem Abhange $= e$, der überall gleichen Tiefe $FK = BL = t$ und der constanten Breite $= b$. In L sei ein Einbau angebracht, wodurch über B ein Stau von der Höhe $\overline{BA} = H$

*) Principes, Nr. 150.

Fig. 165.



erzeugt und das Längenprofil des gestauten Wasserspiegels *AJF* geworden sein mag. Könnte man sodann die Wasseroberfläche über *B* genau horizontal voraussetzen, so würde der Punkt *G* einer durch *A* gezogenen Wagerechten die Stelle bezeichnen, woselbst der Stau endigte. Dies ist jedoch unmöglich (§. 119), weil sodann das Wasser kein Gefälle besitzen und mithin ohne Bewegung sein würde. Wir nehmen daher eine Gerade *AD* an, welche dasselbe Gefälle besitzen soll wie das Wasser über *B*, und die zugleich Tangente für den Punkt *A* der als Kreisbogen anzusehenden Staucurve *AJF* sein mag, dabei vorausgesetzt, daß *D* im ungestauten Wasserspiegel *FB* liegt.

Eine Gerade von *D* nach *F* wird ferner als Tangente des Kreisbogens *FJA* bei *F* anzusehen und deshalb $\overline{FD} = \overline{DA}$ zu setzen sein.

Zieht man endlich durch *D* eine Horizontale *CD*, so wird *CA* das Gefälle auf die Canalstrecke *DB* oder genau genug auf *CD* darstellen, so daß, wenn der betreffende Abhang mit e_1 bezeichnet wird,

$$e_1 = \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} \text{ ist, oder auch}$$

$$(1)\quad e_1 = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}, \text{ wenn man } \overline{CD} \text{ mit } \overline{AD} \text{ verwechselt.}$$

Da ferner auch der Abhang $= e$ des ungestauten Wasserspiegels $e = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$ oder genau genug (2) $e = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$ gesetzt werden kann, so folgt aus (1) und (2) die Proportion:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = e_1 : e \text{ und hieraus:}$$

$$\overline{CB} - \overline{CA} : \overline{CA} = e - e_1 : e_1, \text{ d. i.,}$$

---

*) Funk (Hydrotechnik, Seite 134) nennt die Horizontale *AG* die hydrostatische Stauweite, dagegen *AF* (die wirkliche) die hydraulische Stauweite.

$$\text{wegen } \overline{CB} - \overline{CA} = \overline{AB} = H,$$

$$(3) \quad \overline{CA} = \frac{H.e_1}{e-e_1},$$

oder weil nach dem Vorhergehenden $\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{e_1}$ ist, endlich auch

$$\overline{AD} = \frac{H}{e-e_1},$$

als Ausdruck für die Tangente $\overline{AD}$ oder die Hälfte der Stauweite, so daß für die ganze Stauweite gesetzt werden kann

$$\overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = 2.AD, \text{ oder}$$

$$AF = \frac{2.H}{e-e_1}.$$

Da in dieser Gestalt die Formel, Dubuat's Erfahrungen zufolge, zu große Werthe giebt, räth derselbe statt der 2 im Zähler 1,9 zu setzen [1]), so daß zuletzt erhalten wird:

$$\text{I.} \quad l = \frac{1,9.H}{e-e_1}.$$

Außer den verschiedenen, mehr oder weniger unhaltbaren Annahmen, worauf sich die Entwickelung dieser Formel stützt, leidet sie namentlich an dem Uebel, daß sie den Abhang e_1 des aufgestauten Wasserspiegels als bekannt voraussetzt, dem natürlich nicht anders als durch eine Annäherungsrechnung entsprochen werden kann. [2])

Ungeachtet des Correctionscoefficienten der Formel I giebt sie fast immer zu große Werthe [3]), so daß sie recht eigentlich dazu benutzt werden kann, den Ort zu bestimmen, wohin sich ein bestimmter Stau stromaufwärts nicht mehr erstreckt.

Funk [4]) behauptet, daß unter allen Umständen von der Dubuatschen Darstellung für die Ausübung kein Gebrauch zu machen sei, weil die betreffenden Rechnungsresultate sich zu sehr von den Erfahrungswerthen entfernten.

Nach demselben Hydrauliker soll die Curve, welche der gestaute Wasserspiegel oberhalb des Wehres bildet, als eine halbe Parabel angesehen werden können, deren Axe über dem Wasserspiegel liegt, auch soll die hydraulische Stauweite niemals das Doppelte der hydrostatischen betragen. Auf diese Annahmen gestützt leitet Funk für die Stauweite den Ausdruck ab:

$$\text{II.} \quad l = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{H}{e}.$$

---

1) Principes, Nr. 153 und 154.

2) Man sehe deshalb Funk: Hydrotechnik, Seite 135, insbesondere aher Weisbach in der Maschinenencyclopädie, Bd. 2, S. 175.

3) Auch Hagen's Erfahrungen bestätigen dies (Wasserbaukunst, 2. Theil, 1. Bd., Seite 322).

4) a. a. O. Seite 136.

Aber auch dieser Werth leidet an dem doppelten Uebel einer mangelhaften Begründung und der Nichtübereinstimmung mit der Erfahrung. [1])

D'Aubuisson vernachlässigt in I. e_1 ohne Weiteres, und um den hierdurch erzeugten Fehler zu corrigiren, ersetzt er den Coefficienten 1,9 wieder durch 2, schreibt also:

$$\text{III.}\quad l = \frac{2H}{e},$$

wonach die hydraulische Stauweite genau doppelt so groß, wie die hydrostatische sein würde, ein Ausdruck, dessen Mangelhaftigkeit nach dem Vorstehenden von selbst einleuchtet.

Noch andere Formeln zur Bestimmung der Stauweite, ohne gleichfalls begründete Ableitungen und ohne daß dieselben für die Praxis zufriedenstellende Resultate gaben, lieferten St. Guilhem [2]) und Poirée [3]), in Bezug welcher auf die unten citirten Quellen verwiesen werden muß.

[§. 145.]

Unter der Voraussetzung einer sehr bedeutenden Canalbreite in Bezug auf die vorhandene Wassertiefe, so daß letztere bei der Größenbestimmung des Wasserperimeters vernachlässigt werden kann, ferner unter der Annahme eines constanten Gefälles und Profiles in der ganzen Strecke, worauf sich die Staufrage bezieht, läßt sich in nachstehender Weise ein für die Anwendung höchst brauchbarer Ausdruck ableiten.

Man setze in (2) [§. 134] dv gleich Null, d. h. vernachlässige die lebendigen Kräfte, welche den Geschwindigkeitsänderungen in den auf einander folgenden Profilen entsprechen [4]), zähle ferner die gestauten Profile stromaufwärts, schreibe also $-dl$ statt $+dl$, wonach folgt:

$$0 = -dy \,.\, \cos\varphi - dl \,.\, \sin\varphi + \frac{p}{a}(Au + Bu^2)\, dl,$$

wobei u die Geschwindigkeit in einem beliebigen, gestauten Profile von der Wassertiefe y bezeichnet.

---

1) Mit Ausnahme eines Falles am Hameln'schen Wehre (§. 250 der Hydrotechnik) liefert II. auch nach Funk's eigenen Erfahrungen stets zu große Werthe, was dieser Hydrauliker aber nicht seiner Formel, sondern den Flußkrümmungen Schuld giebt.

2) Annales des Ponts et Chaussées 1837, Nr. 2, p. 78 und 1838, Nr. 2, p. 249.

3) Ebendaselbst 1839, Nr. 2, p. 275.

4) Hagen (Wasserbaukunst, 2. Th., 1. Bd., S. 324) glaubt sogar, daß durch diese Annahme das betreffende Rechnungsresultat wahrscheinlich an Genauigkeit gewinne, oder doch die Wirkung der vernachlässigten Geschwindigkeitsänderungen höchst unbedeutend bleibt (a. a. O. S. 329 und 330 durch ein Zahlenbeispiel erwiesen).

Aus letzterer Gleichung folgt aber, wenn $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = i$ und der bekannte Werth (§. 122) $\frac{u^2}{k^2}$ eingeführt wird:

$$(1)\quad dy = \left(\frac{1}{y}\frac{u^2}{k^2} - i\right)dl.$$

Für die ungestaute Strecke *FG*, Fig. 166, wo *t* die constante Tiefe und *v* die unveränderliche mittlere Geschwindigkeit bezeichnen mag, ergiebt sich direct aus §. 122:

$$(2)\quad i = \frac{1}{t}\cdot\frac{v^2}{k^2}, \text{ oder}$$

weil durch alle Profile pr. Secunde dieselbe Wassermenge $= Q$ fließt, d. h. der Beharrungszustand eingetreten sein soll, wegen $Q = bt.v = by.u$, also $v = \frac{y}{t}.u$, auch (aus 2):

$$(3)\quad i = \frac{y^2}{t^3}\cdot\frac{u^2}{k^2}.$$

Entfernt man jetzt $\frac{u^2}{k^2}$ aus (1) mittelst (3), so erhält man endlich:

$$\text{I.}\quad i.dl = \frac{y^3dy}{t^3 - y^3}.\ *)$$

Führt man hier die Stauhöhe $SU = z$, Fig. 166, ein, d. h. setzt $t + z$ statt y, so folgt:

$$i.dl = \frac{(t+z)^3dz}{t^3 - (t+z)^3}.$$

Hieraus ferner

$$idl = -\left[1 + \frac{t^3}{(t+z)^3 - t^3}\right]dz,\ **)$$

so wie nach Ausführung der Division des Zählers in den Nenner:

$$(4)\quad \frac{i.dl}{t} = -\left[\frac{1}{3}\frac{dz}{z} + \frac{2}{3}\frac{dz}{t} + \frac{2}{9}\frac{z.dz}{t^2} - \frac{1}{9}\frac{z^2dz}{t^3} + \frac{1}{27}\frac{z^3dz}{t^4}\cdots\cdots\right].$$

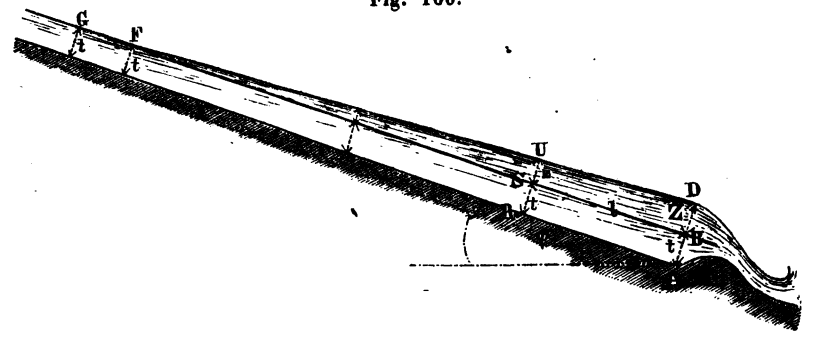
Integrirt man und setzt die größte Stauhöhe *BD* am Einbaue bei *A*, Fig. 166, gleich *Z*, so findet sich endlich:

---

*) Dieselbe Gleichung findet Hagen auf etwas anderem Wege (Seite 326, II. Theil, Bd. 1 seiner Wasserbaukunst). Mir war J. aus den Vorträgen des Herrn Professor Weisbach bereits vor dem Erscheinen der ersten Ausgabe des Hagen'schen Werkes (d. h. vor 1844) bekannt.

**) Auch bei Dupuit (Etudes etc.) pag. 112.

Fig. 166.



$$\text{I.}\quad \frac{i.l}{t} = \tfrac{1}{3}\, lgnt\, \frac{Z}{z} + \tfrac{2}{3}\, \frac{Z-z}{t} + \tfrac{1}{9}\, \frac{Z^2-z^2}{t^2} - \tfrac{1}{27}\, \frac{Z^3-z^3}{t^3} + \tfrac{1}{108}\, \frac{Z^4-z^4}{t^4} -$$

$$- \tfrac{1}{486}\, \frac{Z^6-z^6}{t^6} + \tfrac{1}{567}\, \frac{Z^7-z^7}{t^7} - \tfrac{1}{972}\, \frac{Z^8-z^8}{t^8} + \tfrac{1}{2187}\, \frac{Z^9-z^9}{t^9} -$$

$$- \tfrac{1}{7290}\, \frac{Z^{10}-z^{10}}{t^{10}} + \tfrac{1}{26244}\, \frac{Z^{12}-z^{12}}{t^{12}} \cdots$$

Für den Fall, daß eine Senkung der Oberfläche statt hat (wie dies z. B. zufolge Ausbaggerungen geschehen kann) erhält man:

$$\text{II.}\quad \frac{i.l}{t} = \tfrac{1}{3}\, lgnt\, \frac{Z}{z} - \tfrac{2}{3}\, \frac{Z-z}{t} + \tfrac{1}{9}\, \frac{Z^2-z^2}{t^2} + \tfrac{1}{27}\, \frac{Z^3-z^3}{t^3} + \tfrac{1}{108}\, \frac{Z^4-z^4}{t^4} -$$

$$- \tfrac{1}{486}\, \frac{Z^6-z^6}{t^6} - \tfrac{1}{567}\, \frac{Z^7-z^7}{t^7} - \tfrac{1}{972}\, \frac{Z^8-z^8}{t^8} - \tfrac{1}{2187}\, \frac{Z^9-z^9}{t^9} - \tfrac{1}{7290}\, \frac{Z^{10}-z^{10}}{t^{10}} \cdots$$

Beispiel. Durch ein Wehr wird ein Fluß über dem Fachbaume des ersteren um $0^m,135$ aufgestaut, während die ungestaute Flußtiefe $1^m,0$ und das Bodengefälle $\frac{1}{3000}$ ist; es fragt sich, in welcher Entfernung vom Wehre stromaufwärts der Stau nur noch $0^m,01$ beträgt?

Auflösung. Es ist hier $\frac{Z}{t} = \frac{0,135}{1,0} = 0,135$; $\frac{z}{t} = 0,01$, also $\frac{Z}{z} = \frac{0,135}{0,01} = 13,5$, daher aus I. unmittelbar:

$$\frac{i.l}{t} = \tfrac{1}{3}\, lgnt\, 13,5 + \tfrac{2}{3}\,.\,0,125 + \tfrac{1}{9}\,(0,018225 - 0,0001) - \tfrac{1}{27}\,(0,002360 - 0,000001),$$

d. i. $\frac{i.l}{t} = 0,867563 + 0,083333 + 0,002014 - 0,000097$, oder

$$(1)\quad \frac{i.l}{t} = 0,952813, \text{ wonach}$$

$$l = 0,952813\,.\,1\,.\,3000 = 2777^m,5.$$

Beispiel 2. In welcher Entfernung noch weiter stromaufwärts des vorigen Beispieles beträgt die Stauhöhe nur noch $0^m,0098$?

Auflösung. Hier ist

$$\frac{Z}{t} = 0,010; \quad \frac{z}{t} = 0,0098; \quad \frac{Z}{z} = \frac{0,010}{0,0098} = 1,02,$$

sonach aus I:

$$(2) \quad \frac{i.l}{t} = \tfrac{1}{3}\, lgnt\,.\,1,02 + \tfrac{2}{3}\,.\,0,0002 = 0,00666,$$

so wie ferner:

$$l = 0,00666\,.\,1\,.\,3000 = 19^m,98.$$

Beispiel 3. Durch eine Ausbaggerung wird stromabwärts der Wasserspiegel eines sonst 1 Meter tiefen Flusses von $\frac{1}{4000}$ Bodengefälle um $0^m,225$ gesenkt; es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts diese Senkung nur noch $0^m,01$ beträgt?

Auflösung. Hier ist

$$\frac{Z}{t} = \frac{0,225}{1} = 0,225; \quad \frac{z}{t} = 0,01 \text{ und } \frac{Z}{z} = 22,5,$$

demnach aus II:

$$(3) \quad \frac{i.l}{t} = \tfrac{1}{3}\, lgnt\, 22,5 - \tfrac{2}{3}\,.\,0,215 + \tfrac{1}{9}\,.\,0,050525 + \tfrac{1}{27}\,.\,0,011389625$$
$$+ \tfrac{1}{108}\,.\,0,00256288 = 0,9005675,$$

und ferner:

$$l = 0,9005675\,.\,1\,.\,4000 = 3602^m,2700.$$

§. 146.

Tabellen zur Berechnung von Stauweiten und Stauhöhen. *)

Nachstehende Tabellen beruhen auf der (übrigens willkürlichen) Voraussetzung, daß eine Stauhöhe (pr. Einheit der natürlichen Wassertiefe) $\frac{z}{t} = 0,0098$ den Ausgangspunkt bildet, also eine Stelle der Wasseroberfläche, gleichsam der Ursprung eines betreffenden Coordinatensystems ist, woselbst der Stau als fast verschwunden betrachtet werden kann. Für die bemerkte Stau-

*) Es sind diese Tabellen **ganz neu** mit Hülfe der Formeln I und II **berechnet**, nur die letzten 20 Werthe der ersten Tabellen sind Dupuit (Etudes, p. 255) entlehnt, dem überhaupt das Verdienst zuzuschreiben ist, zuerst den glücklichen Gedanken zur Berechnung praktisch brauchbarer Tabellen aus den gedachten Formeln gefaßt und ausgeführt zu haben. Unsere Tafeln sind von doppelt so großem Umfange wie die Dupuit's.

höhe berechnet sich der Abstand von der ersten Stauhöhe $\frac{z}{t} = 0{,}01$ der Tabelle zu 0,00666, wofür in der mit $f\left(\frac{z}{t}\right)$ bezeichneten Columne der kürzere Werth 0,0067 aufgeführt ist.

Weiteres über die betreffenden Berechnungen erhellt aus den Beispielen des vorigen Paragraphen. In Bezug auf die erste Tabelle ergiebt sich, wenn die Resultate für $\frac{il}{t}$ aus (1) Beispiel 1 und aus (2) Beispiel 2 addirt werden,

$$0{,}952813 + 0{,}00666 = 0{,}959479,$$

was dem Werthe $b\left(\frac{z}{t}\right)$ für $\frac{z}{t} = 0{,}135$ der Tabelle I. entspricht.

Der Gebrauch der Tabellen, beispielweise zur Ermittelung der Stauweiten, besteht einfach darin, daß man die Stauhöhen am Einbaue Z und die z, bis zu welcher man die Stauweite ermitteln will, durch die Tiefe $= t$ des ungestauten Wassers dividirt, für diese Quotienten in der Tabelle die Werthe von $f\left(\frac{Z}{t}\right)$ und $f\left(\frac{z}{t}\right)$ aufsucht, letztere von einander abzieht und dadurch $\frac{i.l}{t}$ erhält. Um endlich die Stauweite l zu finden, multiplicirt man jene Differenz mit der natürlichen Wassertiefe t und dividirt zuletzt durch den Abhang i. Soll umgekehrt die Stauhöhe oder Senkung gefunden werden, so versteht sich nach dem so eben Aufgeführten das Verfahren von selbst, so wie auch zu den betreffenden Verständnissen die nach den Tabellen folgenden Beispiele dienen werden. *)

---

*) Wichtig ist's übrigens auch noch auf die Bemerkungen am Anfange des [§. 145] Rücksicht zu nehmen.

(Tabelle I.)

Zur Berechnung von Erhe

$\frac{z}{t}$	$f\left(\frac{z}{t}\right)$	$\frac{z}{t}$	$f\left(\frac{z}{t}\right)$	$\frac{z}{t}$	$f\left(\frac{z}{t}\right)$	$\frac{z}{t}$
0,010	0,0067	0,160	1,0335	0,310	1,3610	0,460
0,015	0,1452	0,165	1,0473	0,315	1,3700	0,465
0,020	0,2444	0,170	1,0608	0,320	1,3789	0,470
0,025	0,3222	0,175	1,0740	0,325	1,3877	0,475
0,030	0,3863	0,180	1,0869	0,330	1,3964	0,480
0,035	0,4411	0,185	1,0995	0,335	1,4050	0,485
0,040	0,4889	0,190	1,1119	0,340	1,4136	0,490
0,045	0,5316	0,195	1,1241	0,345	1,4221	0,495
0,050	0,5701	0,200	1,1361	0,350	1,4306	0,500
0,055	0,6053	0,205	1,1479	0,355	1,4390	0,505
0,060	0,6376	0,210	1,1595	0,360	1,4473	0,510
0,065	0,6677	0,215	1,1709	0,365	1,4556	0,515
0,070	0,6958	0,220	1,1821	0,370	1,4638	0,520
0,075	0,7222	0,225	1,1931	0,375	1,4720	0,525
0,080	0,7482	0,230	1,2040	0,380	1,4801	0,530
0,085	0,7708	0,235	1,2148	0,385	1,4882	0,535
0,090	0,7933	0,240	1,2254	0,390	1,4962	0,540
0,095	0,8148	0,245	1,2358	0,395	1,5041	0,545
0,100	0,8353	0,250	1,2461	0,400	1,5119	0,550
0,105	0,8550	0,255	1,2563	0,405	1,5197	0,555
0,110	0,8739	0,260	1,2664	0,410	1,5275	0,560
0,115	0,8922	0,265	1,2763	0,415	1,5353	0,565
0,120	0,9098	0,270	1,2861	0,420	1,5430	0,570
0,125	0,9269	0,275	1,2958	0,425	1,5507	0,575
0,130	0,9434	0,280	1,3054	0,430	1,5583	0,580
0,135	0,9595	0,285	1,3149	0,435	1,5659	0,585
0,140	0,9751	0,290	1,3243	0,440	1,5734	0,590
0,145	0,9903	0,295	1,3336	0,445	1,5809	0,595
0,150	1,0051	0,300	1,3428	0,450	1,5884	0,600
0,155	1,0195	0,305	1,3519	0,455	1,5958	0,605

bungen des Wasserspiegels.

$f\left(\frac{z}{t}\right)$	$\frac{z}{t}$	$f\left(\frac{z}{t}\right)$	$\frac{z}{t}$	$f\left(\frac{z}{t}\right)$	$\frac{z}{t}$	$f\left(\frac{z}{t}\right)$
1,6032	0,610	1,8112	0,760	2,0010	0,910	2,1800
1,6106	0,615	1,8178	0,765	2,0071	0,915	2,1858
1,6179	0,620	1,8243	0,770	2,0132	0,920	2,1916
1,6252	0,625	1,8308	0,775	2,0193	0,925	2,1974
1,6324	0,630	1,8373	0,780	2,0254	0,930	2,2032
1,6396	0,635	1,8438	0,785	2,0315	0,935	2,2090
1,6468	0,640	1,8503	0,790	2,0375	0,940	2,2148
1,6540	0,645	1,8567	0,795	2,0435	0,945	2,2206
1,6611	0,650	1,8631	0,800	2,0495	0,950	2,2264
1,6682	0,655	1,8695	0,805	2,0555	0,955	2,2322
1,6753	0,660	1,8759	0,810	2,0615	0,960	2,2380
1,6823	0,665	1,8823	0,815	2,0675	0,965	2,2438
1,6893	0,670	1,8887	0,820	2,0735	0,970	2,2496
1,6963	0,675	1,8951	0,825	2,0795	0,975	2,2554
1,7032	0,680	1,9014	0,830	2,0855	0,980	2,2611
1,7101	0,685	1,9077	0,835	2,0915	0,985	2,2668
1,7170	0,690	1,9140	0,840	2,0975	0,990	2,2725
1,7239	0,695	1,9203	0,845	2,1035	0,995	2,2782
1,7308	0,700	1,9266	0,850	2,1095	1,000	2,2839
1,7376	0,705	1,9329	0,855	2,1154	1,100	2,3971
1,7444	0,710	1,9392	0,860	2,1213	1,200	2,5683
1,7512	0,715	1,9455	0,865	2,1272	1,300	2,6179
1,7589	0,720	1,9517	0,870	2,1331	1,400	2,7264
1,7647	0,725	1,9579	0,875	2,1390	1,50	2,8337
1,7714	0,730	1,9641	0,880	2,1449	1,60	2,9401
1,7781	0,735	1,9703	0,885	2,1508	1,70	3,0458
1,7848	0,740	1,9765	0,890	2,1567	1,80	3,1508
1,7914	0,745	1,9827	0,895	2,1625	1,90	3,2553
1,7980	0,750	1,9888	0,900	2,1683	2,00	3,3594
1,8046	0,755	1,9949	0,905	2,1742	2,10	3,4631
					2,20	3,5564
					2,30	3,6694
					2,40	3,7720
					2,50	3,8745
					2,60	3,9768
					2,70	4,0789
					2,80	4,1808
					2,90	4,2826
					3,00	4,3843
					3,50	5,4366
					4,00	6,4342

(Tab. II.) Zur Berechnung von Senkungen des Wasserspiegels.

$\frac{s}{t}$	$f\left(\frac{s}{t}\right)$	$\frac{s}{t}$	$f\left(\frac{s}{t}\right)$	$\frac{s}{t}$	$f\left(\frac{s}{t}\right)$
0,010	0,0067	0,225	0,8939	0,440	0,9931
0,015	0,1251	0,230	0,8982	0,445	0,9941
0,020	0,2287	0,235	0,9023	0,450	0,9951
0,025	0,2888	0,240	0,9063	0,455	0,9961
0,030	0,3463	0,245	0,9101	0,460	0,9971
0,035	0,3943	0,250	0,9138	0,465	0,9980
0,040	0,4356	0,255	0,9174	0,470	0,9989
0,045	0,4715	0,260	0,9209	0,475	0,9998
0,050	0,5034	0,265	0,9242	0,480	1,0006
0,055	0,5319	0,270	0,9275	0,485	1,0014
0,060	0,5577	0,275	0,9306	0,490	1,0022
0,065	0,5811	0,280	0,9336	0,495	1,0029
0,070	0,6025	0,285	0,9365	0,500	1,0036
0,075	0,6222	0,290	0,9394	0,505	1,0043
0,080	0,6405	0,295	0,9421	0,510	1,0050
0,085	0,6575	0,300	0,9448	0,515	1,0057
0,090	0,6733	0,305	0,9473	0,520	1,0063
0,095	0,6881	0,310	0,9498	0,525	1,0069
0,100	0,7020	0,315	0,9522	0,530	1,0075
0,105	0,7150	0,320	0,9546	0,535	1,0081
0,110	0,7273	0,325	0,9569	0,540	1,0086
0,115	0,7389	0,330	0,9591	0,545	1,0091
0,120	0,7500	0,335	0,9612	0,550	1,0096
0,125	0,7603	0,340	0,9632	0,555	1,0101
0,130	0,7703	0,345	0,9652	0,560	1,0106
0,135	0,7796	0,350	0,9671	0,565	1,0111
0,140	0,7886	0,355	0,9690	0,570	1,0116
0,145	0,7971	0,360	0,9708	0,575	1,0121
0,150	0,8053	0,365	0,9725	0,580	1,0125
0,155	0,8131	0,370	0,9742	0,585	1,0129
0,160	0,8205	0,375	0,9759	0,590	1,0133
0,165	0,8276	0,380	0,9775	0,595	1,0137
0,170	0,8344	0,385	0,9790	0,60	1,0140
0,175	0,8410	0,390	0,9805	0,65	1,0166
0,180	0,8473	0,395	0,9819	0,70	1,0184
0,185	0,8533	0,400	0,9833	0,75	1,0194
0,190	0,8591	0,405	0,9847	0,80	1,0199
0,195	0,8647	0,410	0,9860	0,85	1,0203
0,200	0,8700	0,415	0,9873	0,90	1,0203
0,205	0,8751	0,420	0,9885	0,95	1,0203
0,210	0,8801	0,425	0,9897	1,00	1,0203
0,215	0,8848	0,430	0,9909		
0,220	0,8895	0,435	0,9920		

§. 147.

Beispiele als Gebrauchsanweisung vorstehender Tabellen.

Beispiel 1. Ein Strom hat in seinem natürlichen Zustande $\frac{1}{5000}$ Gefälle pr. Längeneinheit und eine mittlere constante Wassertiefe von 2 Fuß. Durch den Einbau eines Wehres wird über dem Fachbaume des letzteren ein 3 Fuß hoher Stau erzeugt, so daß die Wassertiefe am Wehre 5 Fuß beträgt.

Es ist zu berechnen, in welchen Entfernungen stromaufwärts die Stauhöhen beziehungsweise noch 2 Fuß, 1 Fuß, $\frac{1}{2}$ Fuß und $\frac{1}{4}$ Fuß sind? *)

Auflösung. Für sämmtliche Stauhöhen ist:

$$\frac{Z}{t} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Dagegen für 2 Fuß Stauhöhe: $\frac{z}{t} = \frac{2}{2} = 1{,}0$ und sonach, wenn man letztere beiden Werthe in der mit $\frac{z}{t}$ der Tabelle überschriebenen Columne aufsucht und die correspondirenden Zahlen der Columne $f\left(\frac{z}{t}\right)$ hier niederschreibt:

$$f\left(\frac{Z}{t}\right) = 2{,}8337$$

$$f\left(\frac{z}{t}\right) = 2{,}2839,$$

daher, weil $\frac{i.l}{t} = f\left(\frac{Z}{t}\right) - f\left(\frac{z}{t}\right)$, auch

$$\frac{i.l}{t} = 0{,}5498, \text{ d. i. wegen } i = \frac{1}{5000},\ t = 2,$$

$$l = 0{,}5498 \,.\, 2 \,.\, 5000 = 5498 \text{ Fuß}.$$

Die Berechnung der übrigen Fälle versteht sich hiernach von selbst, weshalb wir nur die Endresultate und zwar unter Nebenstellungen der Hagen'schen und Heinemann'schen, aufführen:

---

*) Es ist dies Beispiel absichtlich Hagen's Wasserbaukunst, Seite 328, II. Theil, Bd. 1, entlehnt, um das Vortheilhafte der Tafeln recht hervorzuheben. Eben so ist nachher Rücksicht auf Heinemann's lange Formel genommen, die derselbe zur Vervollständigung der Hagen'schen Rechnungsweise in Erbkam's Zeitschrift für Baukunst, Jahrg. 1855, Seite 207 mittheilte und solche ebenfalls auf das obige Zahlenbeispiel anwandte.

Stauweiten.				
Stauhöhen	$z = 2$ Fuß	$z = 1',0$ Fuß	$z = \frac{1}{2}$ Fuß	$z = \frac{1}{4}$ Fuß
Nach Hagen	5496	11745	15880	19067
Nach Heinemann	5487	11682	15797	18948
Nach den Tabellen	5498	11726	15876	19068

Beispiel 2. *) In einem 80 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Flusse, welcher 1400 Cubikfuß Wasser pr. Secunde abführt und dabei einen Abhang gleich 0,000623 besitzt, soll ein Wehr eingebaut werden, um das Wasser 3 Fuß hoch aufzustauen; man soll angeben, in welcher Entfernung vom Wehre stromaufwärts die Stauhöhen beziehungsweise sind: 2,5 Fuß, 2 Fuß, 1,5 Fuß, 1,0 Fuß, 0,5 Fuß, 0,25 Fuß und 0,1 Fuß?

Auflösung. Für alle Fälle ist hier $\frac{Z}{t} = \frac{3}{4} = 0{,}75$, und correspondirend nach der Tabelle I: $f\left(\frac{Z}{t}\right) = 1{,}9888$. Sodann wollen wir eine der betreffenden Stauweiten wählen, wobei die Tabellen nur mittelst Interpolation gebraucht werden können.

Es folgt für $z = \frac{1}{4}$ Fuß, $\frac{z}{t} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, d. i. ein Werth, der nach Tabelle I zwischen 0,060 und 0,065 der ersten Columne liegt.

Wir benutzen deshalb die bekannte Interpolationsformel (S. 253):

$$f\left(\frac{z}{t}\right) = y = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

erhalten mit Zuziehung der Tabelle I:

$$x_2 = 0{,}0650 \qquad y_2 = 0{,}6677$$
$$x_1 = 0{,}0600 \quad \text{und} \quad y_1 = 0{,}6377$$
$$x = 0{,}0625$$

sodann aber

$$f\left(\frac{z}{t}\right) = y = 0{,}6376 + 0{,}0301\,\frac{0{,}0025}{0{,}0050} = 0{,}6526.$$

*) Absichtlich Weisbach's Ing. Mechanik (2. Auflage) Bd. 2, S. 180 entlehnt, um die Resultate des Rechnungsganges dieses Hydraulikers mit den Tabellenwerthen vergleichen zu können.

Daher $\frac{i.l}{t} = f\left(\frac{Z}{t}\right) - f\left(\frac{z}{t}\right) = 1{,}9888 - 0{,}6526,$

$$\frac{i.l}{t} = 1{,}3362 \text{ und}$$

$$l = 1{,}3362 \,.\, 4 \,.\, \frac{1000000}{623} = 8579{,}1 \text{ Fuß.}$$

Die übrigen berechneten Werthe stellen wir ohne Weiteres mit den correspondirenden Weisbach'schen in folgendem Täfelchen zusammen:

Stauhöhen $= z$	2,5 Fß.	2',0	1',5	1',0	0,50	0,25	0,10
Wassertiefen $= z + t$	6,5 Fß.	6,0	5,5	5,0	4,5	4,25	4,10
Stauweiten nach Weisbach	1005,6	2078,7	3260,8	4649,1	6537,0	8102,7	10434,5
Stauweiten nach den Tabellen	1014,4	2104,01	3318,1	4768,0	6817,9	8579,1	10700,5

Beispiel 3. *) Die Wassermenge eines Flusses beträgt 40 Cubikmeter pr. Secunde, seine mittlere Tiefe (an ungestauter Stelle) $1^m{,}05$ und sein (ziemlich) constantes Gefälle $0^m{,}00115$. Durch ein Wehr wird in diesem Flusse ein Stau von $1^m{,}5$ Höhe erzeugt und dabei zu wissen verlangt, in welcher Entfernung stromaufwärts dieser Stau noch $0^m{,}6$ beträgt?

Auflösung. Hier ist

$$\frac{Z}{t} = \frac{1{,}50}{1{,}05} = 1{,}428, \quad \frac{z}{t} = \frac{0{,}60}{1{,}05} = 0{,}570.$$

Daher mit Zuziehung von Tabelle I:

$$f\left(\frac{Z}{t}\right) = 2{,}75859 \text{ **)}$$

$$f\left(\frac{z}{t}\right) = 1{,}75890, \text{ d. i.}$$

$$\frac{i.l}{t} = 1{,}000 \text{ genau genug, daher.}$$

*) Belanger: Essai, Nr. 44.

**) Nach bekannter Interpolationsformel ist:

$$f\left(\frac{Z}{t}\right) = y = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 2{,}7264 + 0{,}1073\frac{0{,}030}{0{,}100} = 2{,}75859.$$

$$l = 1{,}0 \,.\, 1{,}05 \,.\, \frac{100000}{115};$$

$$l = 9130^{m}.4.$$

Belanger findet, nach einem umständlichen Verfahren, wie Seite 344 angegeben: $l = 9245^{m},0$.

Beispiel 4. *) Wie hoch wird ein (bei Poissy in der Seine) zu erbauendes Wehr das Niveau des niedrigsten Wasserstandes daselbst erheben, damit stromaufwärts (bei Maisons) in 2020 Meter Entfernung, der Stau nicht mehr als $0^{m},891$ beträgt, vorausgesetzt, daß an letzterer Stelle die Tiefe des ungestauten Wassers $1^{m},59$ beträgt, auch überdies bekannt ist, daß die Niveaudifferenz zwischen den beiden genannten Punkten (Poissy und Maisons) $1^{m},737$ und der Wasserabfluß pr. Secunde 158,52 Cub. Meter beträgt?

Auflösung. Hier ist $i.l = 1{,}737$, $t = 1{,}59$, also

$$\frac{i.l}{t} = \frac{1{,}737}{1{,}590} = 1{,}0924.$$

Ferner ist $\frac{z}{t} = \frac{0{,}891}{1{,}590} = 0{,}560$ und folglich nach Tabelle I:

$$f\left(\frac{z}{t}\right) = 1{,}7444.$$

Ferner ist:

$$1{,}0924 = f\left(\frac{Z}{t}\right) - f\left(\frac{z}{t}\right), \text{ also}$$

$$1{,}0924 + 1{,}7444 = f\left(\frac{Z}{t}\right), \text{ d. i.}$$

$$2{,}8368 = f\left(\frac{Z}{t}\right).$$

Letzterem Werthe entspricht, genau genug, nach Tabelle I:

$$\frac{Z}{t} = 1{,}50, \text{ daher}$$

$$Z = 1{,}50 \,.\, 1{,}59 = 2^{m},385,$$

*) Eine berühmte Aufgabe, deren Lösung Prony zuerst versuchte. (Annales des Ponts et Chaussées, 1835, 2, p. 244 u. f. etc.) Später unternahm Vauthier eine neue Lösung, in Betreff welcher auf unsere Quelle verwiesen werden muß (Annales des Ponts et Chaussées, 1836, 2, p. 241). Man sehe auch Dupuit: Etudes etc., pag. 109.

ganz denselben Werth findet Vauthier *) nach einem umständlichen Verfahren, welches Belanger nachgebildet ist.

Beispiel 5. **) In einem Flusse, woselbst das Bodengefälle (ziemlich constant) 0,0003, ferner die natürliche Wassertiefe $1^m,2$ ist, unternimmt man eine Ausbaggerung (oder Verbreiterung des Profiles), wodurch an betreffender Stelle eine Senkung des Wasserspiegels $= 0^m,36$ entsteht. Es fragt sich, in welcher Entfernung stromaufwärts diese Senkung nur noch $0^m,12$ beträgt?

Auflösung. Es ist hier: $\frac{Z}{t} = \frac{0,36}{1,2} = 0,3$; $\frac{z}{t} = \frac{0,12}{1,20} = 0,10$; sonach zufolge Tabelle II:

$$f\left(\frac{Z}{t}\right) = 0,9448;\ f\left(\frac{z}{t}\right) = 0,7020, \text{ daher:}$$

$$\frac{i.l}{t} = 0,9448 - 0,7020 = 0,2428, \text{ also}$$

$$l = 0,2428 \,.\, 1,2 \,.\, \tfrac{10000}{3} = 971^m,2.$$

Beispiel 6. Wie berechnet sich mit Hülfe der Tafeln die Stauweite des Beispieles Seite 348, woselbst am Hamelner Wehre die Stauhöhe 7,097 Fuß, die natürliche (ungestaute) Wassertiefe 2,40 Fuß, die Rösche $\frac{1}{2253}$ und die Stauhöhe am Ende der fraglichen Strecke 5 Fuß betrug?

Auflösung. Zunächst ergiebt sich

$$\frac{Z}{t} = \frac{7,097}{2,40} = 2,957,\ \frac{z}{t} = \frac{5,0}{2,4} = 2,083.$$

Sodann mittelst Tabelle I. und gehöriger Interpolation: ***)

$$f\left(\frac{Z}{t}\right) = 4,3403;\ f\left(\frac{z}{t}\right) = 3,4455. \text{ Daher:}$$

$$\frac{i.l}{t} = 4,3403 - 3,4455 = 0,8948, \text{ also:}$$

$$l = 0,8948 \,.\, 2,40 \,.\, 2253 = 4838,36 \text{ Fuß},$$

ein Werth, der verhältnißmäßig gut mit dem Seite 349 gefundenen übereinstimmt.

[§. 148.]

Zum Schlusse des Staucapitels fügen wir eine Abbildung, Fig. 167, und Belanger'sche Berechnung eines der interessantesten, bereits

*) Annales des Ponts et Chaussées 1836, 2, p. 283.

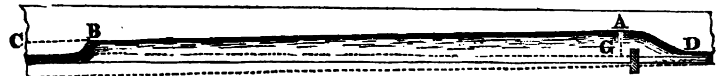
**) Dupuit: Etudes, pag. 130.

***) $f\left(\frac{Z}{t}\right) = 4,2826 + 0,1017 \frac{0,057}{0,10} = 4,2826 + 0,0577 = 4,3403.$

$f\left(\frac{z}{t}\right) = 3,3594 + 0,1017 \frac{0,083}{0,100} = 3,3594 + 0,0861 = 3,4455.$

§. 143 behandelten Staufalles auf, welchen Bidone in einem gemauerten Canale von $0^m,325$ Seite des quadratischen Querschnittes beobachtete. [1])

Fig. 167.



In der Figur bemerke man zuerst, daß hier die gestaute Oberfläche *AB* convex ist, während sie in allen bisher behandelten Fällen (den Annahmen Dubuat's und den Messungen Funk's [2]) entsprechend) concav vorausgesetzt wurde.

Bei *C* und von da stromaufwärts floß das Wasser fast parallel dem Canalboden und hatte dabei $0^m,064$ Tiefe und eine mittlere Geschwindigkeit von $1^m,69$. Bei *B*, vom Wehre $4^m,5$ abstehend, bildete sich plötzlich der bereits §. 143 erörterte Sprung, so daß daselbst eine Stauhöhe von $0^m,125$ und eine Wassertiefe von $0^m,125 + 0,064 = 0^m,189$ eintrat. [3]) Von *B* bis *A* nahm die Stauhöhe zu und erreichte bei *A* ihr Maximum, nämlich $\overline{AG} = 0^m,216$ oder es betrug daselbst die Wassertiefe $0^m,210 + 0,064 = 0^m,28$.

Das Bodengefälle pr. Längeneinheit war nicht constant, konnte jedoch, 4 Meter stromaufwärts vom Einbaue, im Mittel zu 0,023 angenommen werden. Die pr. Secunde abgeführte Wassermenge betrug 0,0351 Cubikmeter.

Belanger [4]) benutzte zu den Berechnungen dieses Falles einen aus Formel II [§. 134] abzuleitenden Ausdruck, den man erhält, wenn $x = b$, $a = b.y$ gesetzt wird, wobei *b* die constante Breite, *y* die veränderliche Tiefe der gestauten Strecke bezeichnet und endlich $\frac{v^2}{g}$ mit dem bereits Seite 341 (Note) erwähnten Coefficienten $\alpha' = 1,1$ multiplicirt, endlich *dl* und *dy* mit Δl und Δy vertauscht wird. Schließlich bedarf es kaum der Erwähnung, daß wenn *Q* die Wassermenge pr. Secunde bezeichnet, $v = \frac{Q}{by}$ ist. Daher:

$$\frac{\Delta l}{\Delta y} = \frac{\alpha' \frac{v^2}{g} . \frac{b}{b.y} - 1}{\frac{b+2y}{by}(Av + Bv^2) - i}, \text{ oder}$$

$$\Delta l = \frac{\left(y - \alpha' \frac{v^2}{g}\right) \Delta y}{i.y - \left(1 + \frac{2y}{b}\right)(Av + Bv^2)}.$$

1) Auch D'Aubuisson: Traité d'hydraulique, Nr. 169, p. 200.
2) Hydrotechnik, 7., 8. und 9. Beobachtung. Seite 16 und 17.
3) Mit Hinsicht auf die Tabelle, Seite 367, beziehen sich diese Zahlenwerthe auf den 6ten Versuch (2ter Versuch der 2ten Reihe.
4) Notes sur le Cours d'hydraulique. Session 1849—1850, p. 82—84.

Zu bemerken ist übrigens noch, daß Belanger für A und B die Eytelwein'schen Werthe in Anwendung gebracht, also gesetzt hat (§. 120, S. 302):

$$A = 0{,}0000243;$$
$$B = 0{,}000366.$$

Die betreffenden Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
y	$v = \frac{Q}{by} = \frac{0{,}108}{y}$	$\frac{v^2}{g}$	Zähler $y - 1{,}1\frac{v^2}{g}$	$iy = 0{,}023 \cdot y$	$1 + \frac{2y}{b} = 1 + 6{,}15 \cdot y$	$Av + Bv^2$	Product $= P$ der Columnen 6 und 7	Nenner $i \cdot y - P$ 5. Columne — 8. Columne	$\frac{\Delta l}{\Delta y} =$ Quotient der Col. 4 und 9	Abstände der auf einander folgenden Tiefen y	Abstände von $y = 0^m{,}28$ aus
0m,28	0,385	0,0151	0,2634	0,00644	2,722	0,0000635	0,00017	0,00627	42,0	0,419	0,000
0,27	0,400	0,0163	0,2521	0,00621	2,661	0,0000682	0,00018	0,00603	41,8	0,417	0,419
0,26	0,415	0,0176	0,2406	0,00598	2,599	0,0000730	0,00019	0,00579	41,6	0,415	0,836
0,25	0,432	0,0190	0,2291	0,00575	2,538	0,0000787	0,00020	0,00555	41,3	0,411	1,251
0,24	0,450	0,0206	0,2172	0,00552	2,476	0,0000849	0,00021	0,00531	40,9	0,407	1,662
0,23	0,470	0,0225	0,2052	0,00529	2,415	0,0000922	0,00022	0,00507	40,5	0,403	2,069
0,22	0,491	0,0246	0,1929	0,00506	2,353	0,0001001	0,00024	0,00482	40,0	0,397	2,479
0,21	0,514	0,0269	0,1804	0,00483	2,292	0,0001091	0,00025	0,00458	39,4	0,391	2,869
0,20	0,540	0,0297	0,1673	0,00460	2,230	0,0001197	0,00027	0,00433	38,7	0,382	3,260
0,19	0,568	0,0329	0,1538	0,00437	2,169	0,0001317	0,00029	0,00408	37,7	0,371	3,642
0,18	0,600	0,0367	0,1396	0,00414	2,107	0,0001461	0,00031	0,00383	36,4	0,357	4,013
0,17	0,635	0,0411	0,1248	0,00391	2,046	0,0001628	0,00033	0,00358	34,9	0,341	4,370
0,16	0,675	0,0464	0,1090	0,00368	1,984	0,0001829	0,00036	0,00332	33,1	0,317	4,711
0,15	0,720	0,0528	0,0919	0,00345	1,723	0,0002070	0,00040	0,00305	30.1	0,283	5,028
0,14	0,771	0,0606	0,0733	0,00322	1,861	0,0002360	0,00044	0,00278	26,1	0,238	5,311
0,13	0,831	0,0704	0,0526	0,00299	1,800	0,0002726	0,00049	0,00250	21,0	0,174	5,549
0,12	0,900	0,0826	0,0291	0,00276	1,738	0,0003179	0,00055	0,00221	13,1	0,074	5,723
0,11	0,982	0,0983	0,0019	0,00253	1,677	0,000[illegible]764	0,00063	0,00190	1,0		5,797
0,10	1,080	0,1190	0,0209	0,00230	1,615	0,0004526	0,00073	0,00157	— 13,3		

Dupuit *) berechnet gegenwärtigen Fall der Bidone'schen Staubeobachtungen mittelst eines Ausdruckes, der dem unsrigen I. [§. 136] sehr ähnlich ist, umgeht damit den umständlichen Entwurf vorstehender Tabelle, gelangt indeß, der Natur der Sache nach, zu einer Formel, welche eine directe Auflösung nicht zuläßt, sondern ebenfalls langweilige Proberechnungen nöthig macht. Beide Rechnungsverfahren liefern indeß zu große Werthe, nämlich Belanger (vorstehende Tabelle) $l=5^m,797$, wenn stromaufwärts der Stau noch $0^m,110-0^m,064=0^m,046$ beträgt, während Dupuit für dieselbe Stauhöhe $l=5^m,914$ berechnet. Bidone's Beobachtung gab $l=3^m,5$.

Dupuit schreibt dies ungünstige Resultat theils Verlusten an lebendigen Kräften zu, welche nahe der Staustelle statt haben und worauf beide Rechnungen gar nicht Rücksicht nehmen, theils glaubt derselbe auch, Bidone habe sich Beobachtungsfehler zu Schulden kommen lassen, indem die Versuche eigentlich größere aber nicht kleinere Resultate als die Rechnungen hätten geben müssen, und räth deshalb schließlich, die Bidone'schen Versuche zu wiederholen. Höchst wahrscheinlich liegt der Fehler in beiden, d. h. an den nicht entsprechend begründeten Rechnungen und an den Beobachtungen. **)

Dritter Abschnitt.

Bewegung des Wassers in Röhren und Röhrenleitungen.

Erstes Kapitel.

Bewegung des Wassers in Röhren.

§. 149.

Die Gesetze der Bewegung des Wassers in Röhren würden ohne Weiteres aus §. 68 bis mit §. 70 zu entnehmen sein, hätte man dort bereits auf den Widerstand Rücksicht genommen, welcher, eben so wie beim Fortfließen in Canälen, in Röhren bemerkbar wird, sobald deren Länge (nach Seite 232)

---

*) Etudes, pag. 132.

**) Vauthier (A. des Ponts et Ch. 1836, 2, pag. 278) berechnet diesen Fall mittelst der Formel (1) §. 134, und zwar in der Voraussetzung, daß er die Ausdehnung des Sprunges *BC*, Fig. 164, zu $0^m,45$ und nicht wie Belanger und Dupuit zu Null annimmt, und gelangt dadurch allerdings zu einem der Beobachtung gleichen Resultate. Hieraus schließt Vauthier, daß die Formeln für die permanente Wasserbewegung auch zur Berechnung der Ausdehnung jedes dem Belanger'schen ähnlichen Sprunges anwendbar sei, was mindestens ein höchst gewagter Schluß genannt werden muß.

ungefähr das Vierfache ihres Durchmessers übertrifft. In der Gestalt, wie sich die betreffenden Gleichungen an den citirten Orten vorfinden, geben sie gegenüber den Beobachtungen viel zu große Geschwindigkeiten, und zwar ist diese Differenz um so bedeutender, je länger die Röhren sind und je kleiner ihr Durchmesser ist.

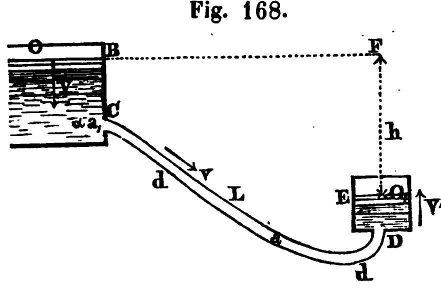
So weit uns bis jetzt Beobachtungen über die Natur dieses Widerstandes belehren, kann man ihn, für practische Zwecke, abgesehen von den Zahlenwerthen der betreffenden Coefficienten, durch denselben mathematischen Ausdruck, §. 120, darstellen, welcher unter ziemlich gleichen Umständen bei der Canalbewegung benutzt wurde.

Bezeichnet man den Durchmesser der überall als gleichweit vorauszusetzenden cylindrischen Röhre von kreisförmigem Querschnitte mit d und deren Länge mit l, so ergiebt sich jener Widerstandswerth zu

$$\frac{\gamma}{g} d\pi \, . \, l\,(\alpha' v + \beta' v^2),$$

wobei v die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre ist.

Fig. 168.



Hiernach sei O, Fig. 168, der Querschnitt des Speisebassins B der Röhre CD, woselbst sich die pr. Secunde abfließende Wassermasse $M = \frac{Q}{g}$ fortwährend an der Oberfläche mit der Geschwindigkeit V so ersetzen mag, daß die Druckhöhe über der Mündung a_1 bei C stets dieselbe bleibt, dabei aber der Contractionscoefficient bei a_1 gleich α ist. Das prismatische Gefäß ED, in welches sich das Röhrenwasser ergießt, habe einen Querschnitt $= O_1$ und die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche E daselbst sei $= V_1$; endlich werde die Druckhöhe über E oder die Differenz der Wasserspiegel in E und B mit h bezeichnet.

Unter denselben Voraussetzungen, wie §. 68 und 73, und mit Beachtung, daß hier $OV = \alpha a_1 v_1 = av = O_1 V_1$ ist, wenn v_1 die Geschwindigkeit in der Mündung a_1 bei C bezeichnet, liefert das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte in Verbindung mit dem Principe Carnots unmittelbar die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} M (V_1^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} M (v_1 - v)^2 + \tfrac{1}{2} M (v - V_1)^2 =$$
$$gMh - \frac{\gamma}{g} d\pi l (\alpha' v + \beta' v^2) v,$$

oder wegen $\frac{\gamma}{g} v = \frac{M}{a} = \frac{4M}{d^2\pi}$, so wie $V_1 = \frac{av}{O_1}$ und $v_1 = \frac{a}{\alpha a_1} v$:

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 \left(\frac{a^2}{O_1^2} - \frac{a^2}{O^2}\right) + \tfrac{1}{2} Mv^2 \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 + \tfrac{1}{2} Mv^2 \left(1 - \frac{a}{O_1}\right)^2 =$$
$$gMh - \frac{4l}{d} M (\alpha' v + \beta' v^2),$$

d. i. auch, wenn man durch gM dividirt:

$$\frac{v^2}{2g} \left[\frac{a^2}{O_1^2} - \frac{a^2}{O^2} + \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{a}{O_1}\right)^2\right] =$$
$$h - \frac{l}{d} \left(\frac{4\alpha'}{g} . v + \frac{4\beta'}{g} v^2\right),$$

oder endlich, wenn $\frac{4\alpha'}{g} = A'$ und $\frac{4\beta'}{g} = B'$ gesetzt wird:

$$\text{I.} \quad \frac{v^2}{2g} \left[\frac{a^2}{O_1^2} - \frac{a^2}{O^2} + \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{a}{O_1}\right)^2\right] =$$
$$h - \frac{l}{d} (A' v + B' v^2).$$

Ist der Querschnitt a der Röhre CD in Bezug auf die Querschnitte O und O_1 der Gefäße B und ED klein genug und führt man nach Seite 169 statt $\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ den sogenannten Widerstandscoefficienten η_1 ein, so ergiebt sich:

$$\text{II.} \quad h = \frac{v^2}{2g} (1 + \eta_1) + \frac{l}{d} (A' v + B' v^2),$$

oder endlich für $1 + \eta_1 = \frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$\text{III.} \quad h = \frac{v^2}{2g\varepsilon^2} + \frac{l}{d} (A' v + B' v^2).$$

Mit Rücksicht auf 52 Beobachtungen, nämlich 7 von Couplet, 26 von Bossut, 18 von Dubuat und 1 Versuch von Gueymard *) erhält man für praktische Rechnungen aus III **):

---

*) Annales des Mines, IIe Serie, T. V. 1829, p. 435.

**) Weisbach, im polytechn. Centralblatte 1840, Bd. 2, S. 863. (Man sehe auch die folgende Anmerkung.)

Für Meter:

$$\text{IV.}\quad h = 0{,}0774\,.\,v^2 + 0{,}00022915\,\frac{l}{d}\,v + 0{,}00092627\,\frac{l}{d}\,v^2.$$

Für Hannov. Fuß:

$$\text{V.}\quad h = 0{,}02254\,.\,v^2 + 0{,}00022915\,\frac{l}{d}\,v + 0{,}0002705\,\frac{l}{d}\,v^2.$$

In beiden Fällen $\varepsilon = 0{,}8125$, $\varepsilon^2 = 0{,}660156$ vorausgesetzt.

Zur Auffindung des Röhrendurchmessers $= d$ ergiebt sich aus diesen Gleichungen, wenn Q das Wasserquantum pr. Secunde bezeichnet, also $v = \frac{4Q}{\pi d^2} = 1{,}27324\,\frac{Q}{d^2}$ ist:

$$\text{VI.}\quad d^5 - 0{,}00029176\,\frac{lQ}{h}\,d^2 + 0{,}12549\,\frac{Q^2}{h}.d - 0{,}00150161\,\frac{lQ^2}{h} = 0 \text{ Meter,}$$

$$\text{VII.}\quad d^5 - 0{,}00029176\,\frac{lQ}{h}\,d^2 - 0{,}03654\,\frac{Q^2}{h}.d - 0{,}0004385\,\frac{lQ^2}{h} = 0 \text{ hann.Fuß.}$$

Anmerkung 1. Die Ermittelung der Coefficienten A' und B' in den vorstehenden Formeln hat Weisbach nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Zuziehung der nachverzeichneten Versuchswerthe unternommen.

Setzt man

$$A' + B'v = \frac{d}{lv}\left(h - \frac{v^2}{2g\varepsilon^2}\right) = f$$

und bezeichnet die Anzahl der Beobachtungen mit n, so erhält man bekanntlich *):

$$A' = \frac{\Sigma(f)\,.\,\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\,.\,\Sigma(f.v)}{n\Sigma(v^2) - [\Sigma(v)]^2};$$

$$B' = \frac{n\Sigma(fv) - \Sigma(f)\,.\,\Sigma(v)}{n\Sigma(v^2) - [\Sigma(v)]^2}.$$

Von den bemerkten Versuchen hält Weisbach den ersten, den vierundzwanzigsten und den letzten Versuch als ungeeignet, setzt daher $n = 52 - 3 = 49$, berechnet sodann

$$\Sigma(v) = 1140{,}708$$
$$\Sigma(f) = 0{,}0099390$$
$$\Sigma(v^2) = 38500{,}6593$$
$$\Sigma(fv) = 0{,}3061069$$

und findet endlich für pariser Zollmaß:

$$A' = 0{,}000057287 \text{ und}$$
$$B' = 0{,}00000625232.$$

Wir lassen nunmehr das Verzeichniß der wiederholt erwähnten Versuche folgen.

---

*) Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Hagen, S. 87. Ferner Wittstein: Methode der kleinsten Quadrate in Navier Lehrb. der Differenzial- und Integralrechnung, Anhang S. 386.

Beobachter.	Nummer des Versuchs	Länge der Leitung $= l$ in franz. Zollen	Durchmesser der Leitung $= d$ in franz. Zollen	Gefälle der Leitung $= h$ in franz. Zollen	Geschwindigkeit des Wassers $= v$ in franz. Zollen
Du Buat	1	737	1	0,150	1,589
Couplet	2	84240	5	5,583	2,011
„	3	84240	5	$11\frac{1}{3}$	3,154
Du Buat	4	737	1	0,5	3,623
Couplet	5	84240	5	16,75	4,127
„	6	84240	5	21,083	4,806
„	7	84240	5	24	5,213
„	8	84249	5	25	5,323
Du Buat	9	138,5	1	0,7	8,689
„	10	737	1	4,2	10,441
„	11	737	1	4,2	10,671
Bossut	12	600	1	4	12,223
„	13	2160	$1\frac{1}{3}$	12	12,562
Du Buat	14	737	1	5,93	13,315
Bossut	15	1800	$1\frac{1}{3}$	12	14,066
Gueymard	16	118212	10,159	102,771	14,834
Du Buat	17	737	1	7,78	15,112
Bossut	18	1440	$1\frac{1}{3}$	12	16,128
Du Buat	19	737	1	8,96	16,284
Bossut	20	2160	2,01	12	16,377
Du Buat	21	737	1	8,96	16,625
Bossut	22	1800	2,01	12	18,304
„	23	2160	$1\frac{1}{3}$	24	18,896
„	24	1080	$1\frac{1}{3}$	12	19,943
Du Buat	25	737	1	12,32	19,991
Bossut	26	1440	2,01	12	20,707
Du Buat	27	737	1	13,7	20,970
Bossut	28	1800	$1\frac{1}{3}$	24	21,032
Du Buat	29	737	1	14,6	21,856
Bossut	30	600	1	12	22,282
„	31	720	$1\frac{1}{3}$	12	23,360
„	32	1080	2,01	12	23,806
„	33	1440	$1\frac{1}{3}$	24	24,004
„	34	2160	2,01	24	24,731
„	35	1800	2,01	24	27,470
„	36	1080	$1\frac{1}{3}$	24	28,075
Du Buat	37	737	1	23,7	28,669
Bossut	38	720	2,01	12	29,215
Du Buat	39	138,5	1	6	29,341
Bossut	40	1440	2,01	24	30,896
„	41	360	$1\frac{1}{3}$	12	33,160
„	42	720	$1\frac{1}{3}$	24	34,473
„	43	1080	2,01	24	35,765
Couplet	44	43200	18	145,083	39,159
Bossut	45	360	2,01	12	40,322
„	46	720	2,01	24	43,000
„	47	360	$1\frac{1}{3}$	24	48,534
Du Buat	48	117	1	18	58,310
„	49	138,5	1	20,95	58,808
Bossut	50	360	2,01	24	58,903
Du Buat	51	117	1	$26\frac{2}{3}$	71,301
„	52	117	1	36	84,945

Anmerkung 2. Ueber den Widerstand, welchen bewegtes Wasser in Röhren erfährt, handelte zuerst Pitot in den Memoiren der pariser Academie von 1728, indem er daselbst zeigt, daß sich der Widerstand wie umgekehrt die Durchmesser der Röhren verhalte. Die ersten und zugleich für die Praxis noch heute brauchbarsten Beobachtungen stellte Couplet [1]) an den Wasserleitungen von Marly nach Versailles an, die leider nur nicht umfänglich genug waren, um den Anforderungen hinlänglich zu entsprechen; am allerwenigsten aber befriedigten die Theorien, welche sowohl Couplet selbst als nachher Belidor auf diese Versuche zu gründen suchten.

Die größte Zahl von Versuchen, mit besonders hierzu hergestellten Röhren aus Weisblech, stellte Bossut bei dem Speisebassin an, welches die Stadt Mezières mit Wasser versorgt. [2]) Von diesen wie den Couplet'schen Versuchen sind die brauchbarsten in vorstehender Tabelle enthalten, worauf zur Beurtheilung des Umfanges der Versuche verwiesen werden muß. Bossut wagte jedoch nicht aus den überhaupt gewonnenen Erfahrungsresultaten einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, vielmehr empfahl er, aus den Beobachtungswerthen durch Interpolation oder durch graphische Darstellung, etwa zu suchende Größen annäherungsweise zu ermitteln.

Dubuat [3]) unternahm neue Versuche, um die Couplet's und Bossut's zu vervollständigen, und war besonders so glücklich jene mathematische Formel aufzustellen, welche wir bereits S. 298 aufführten und die er für Röhren wie Canäle gleich anwendbar hielt. Die betreffenden Zahlen-Coefficienten bestimmte Dubuat aus 7 Beobachtungen Couplet's, 26 Bossut's und aus 56 eigenen, überhaupt aus 89 an Röhren gemachten Beobachtungen, denen er 36 Beobachtungen (Seite 300 mitgetheilt) an Canälen und Flüssen beifügte.

Die Mängel der Dubuat'schen Formel wurden bereits Seite 289 erörtert, und waren Ursache, daß man sich auch für Röhrenleitungen bemühte, andere brauchbarere mathematische Ausdrücke zu bilden.

In Deutschland gebührt Woltman [4]) das Verdienst, eine derartige bessere Formel aufgestellt zu haben.

Er findet (1790), aus entsprechenden Raisonnements und unter Bestimmung der Zahlenwerthe mittelst 87 Versuchen Couplet's, Bossut's und Dubuat's für Röhrenleitungen [5]):

$$\frac{v^{\frac{7}{4}}}{133,6} = \frac{g \cdot r}{b} \text{ (franz. Zollmaß)},$$

wobei $g = 362$, $r = \frac{1}{4} d$, $b = \dfrac{l}{h - \dfrac{v^2}{478}}$ ist, weshalb man auch schreibt:

1) Couplet der Sohn theilt die betreffende Abhandlung in den Mémoires de l'Académie für 1732 mit. Ausführlich berichtet hierüber Bossut in seinem Traité d'hydrodynamique, Tome II, Nr. 672.
2) Seite 128, T. II, seiner 1795 erschienenen Hydrodynamique.
3) Principes, Nr. 334.
4) Beiträge zur hydraulischen Architectur, Bd. 1, Seite 165.
5) Ebendaselbst, Seite 169.

$$v^{\frac{7}{4}} = 133{,}6 \,.\, g \,.\, \frac{d}{4}\left(\frac{h - \frac{v^2}{478}}{l}\right).$$

Eytelwein hielt auch letzteren Ausdruck noch zur Bestimmung von v nicht einfach genug und entwickelte (1796) aus allgemeinen Principien der Hydraulik einen anderen, dessen Zahlencoefficienten er aus 51 Beobachtungen (7 von Couplet, 26 von Bossut und 18 von Dubuat) [1]) bestimmte und dadurch überhaupt erhielt:

$$v = \sqrt{\frac{478 \,.\, h}{1 + 0{,}0206\,\frac{l}{d}}},$$

wobei sich alle Größen auf pariser Zolle beziehen. [2])

Noch brauchbarer für große Geschwindigkeiten hält Eytelwein folgende Formel:

$$v = \sqrt[35]{\left(\frac{478 \,.\, h}{1 + 0{,}0206\,\frac{l}{d}}\right)^{18}},$$

der er sich auch bei Röhrenleitungen, in den bemerkten Zusätzen der Dubuat'schen Hydraulik, ausschliesslich bediente.

Prony's (1802) bereits Seite 299 hervorgehobenen Bemühungen eine recht brauchbare Formel für das Gesetz der Bewegung des Wassers in Canälen zu Stande zu bringen, wurden Veranlassung, daß dieser Hydrauliker gedachte Formel auch auf Röhrenleitungen anzuwenden suchte und hierzu aus den bekannten, von Eytelwein bereits benutzten, 51 Versuchen, nach einer Methode von La Place [3]) die Gleichung entwickelte:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{d}(0{,}0000173314 \,.\, v + 0{,}00000940302 \,.\, v^2) \text{ für pariser Zoll,}$$

oder

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{d}(0{,}0000173314 \,.\, v + 0{,}000348259 \,.\, v^2) \text{ für Meter,}$$

Zwölf Jahre später (1814) behandelte Eytelwein letztere Form der Darstellung von Neuem [4]), und zwar besonders aus dem Grunde, weil Prony ein wesentliches Glied, nämlich das, was sich auf die Contraction beim Eintritt des Wassers in die Röhre bezieht, vernachlässigt hatte, und findet mit Zuziehung derselben Beobachtungen nach gleicher Methode:

---

1) Man sehe hierzu die vorstehende Tabelle.

2) Dubuat's Principien der Hydraulik, deutsch von Kosmann, mit Zusätzen von Eytelwein. Berlin 1796, Seite 86 etc.

3) Mécanique céleste, 1re part., liv. 3, art. 40 und auch Récherches physico-mathématiques de Prony, introduction, p. XVIII.

4) Abhandlung der Königlichen Academie der Wissenschaften in Berlin. Aus den Jahren 1814—1815 S. 159.

$$h = \frac{v^2}{2g\varepsilon^2} + \frac{4l}{d}(0{,}0000223579 \,.\, v + 0{,}0000075882 \,.\, v^2)$$ für pariser Zoll,

wobei $\varepsilon = 0{,}8125 = \frac{13}{16}$, also $\varepsilon^2 = 0{,}660156$ vorausgesetzt ist.

Die Versuche von Gerstner [1]) (1798) und die Bemühungen des Engländers Young [2]) um eine passende Formel mögen insbesondere deshalb hier aufgeführt werden, weil ersterer den Einfluß der Wärme auf die Bewegung des Wassers in Röhren nachwies, daß durch erhöhte Temperatur die Geschwindigkeit vergrößert werde [3]) und letzterer (höchst wahrscheinlich ganz richtig) die Erfahrungscoefficienten der Röhrenformel, als mit den Durchmessern der Röhren veränderlich annahm.

Weisbach [4]) wandte zuerst die Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Coefficienten A' und B' an und benutzte dabei, außer den bekannten 51 Beobachtungen noch eine von Gueymard, welche dieser Ingenieur an der Wasserleitung zu Grenoble angestellt hatte. [5]) Die Resultate der betreffenden Rechnungen wurden vorher bereits mitgetheilt.

Hagen [6]) kommt bei seinen neueren Bestimmungen auf den Woltmann'schen gebrochnen Exponenten $\frac{7}{4}$ zurück, benutzt außer bereits oben aufgeführten Versuchen auch noch von Provis [7]) in England angestellte, und findet ebenfalls nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn ϱ den innern Röhrenhalbmesser bezeichnet,

$$h = 0{,}024 \,.\, v^2 + 0{,}003 \,.\, \frac{l}{\varrho}\, v^{\frac{7}{4}},$$

wo h, v und l in Fußen und ϱ in Zollen, rheinländisches Maß, ausgedrückt sind.

Auch diesen Ausdruck betrachtet Hagen nur als Annäherungswerth, räth deshalb, das erste Glied rechts ganz fortzulassen, dafür aber den Zahlencoefficienten des zweiten Gliedes auf 0,005 zu erhöhen, wodurch die Formel gleichzeitig noch für Röhren mit schwachen Krümmungen brauchbar werden soll. Es wird sonach

$$h = 0{,}005\, \frac{l}{\varrho}\, v^{\frac{7}{4}},$$

1) Handbuch der Mechanik, Bd. 2, Seite 191.
2) „Rees Cyclopaedia", Artikel Water, Bd. 38, und daraus „Maschinenencyclopädie, Bd. 2, Seite 564.
3) Indeß gilt dies nur für Röhren von geringen Durchmessern. Gerstner wandte zu seinem Versuche solche von $\frac{4}{5}$ bis $2\frac{2}{5}$ Linien Weite an. Seine Resultate bewogen ihn zu mancherlei interessanten Folgerungen, z. B. Nachweis, weshalb der Puls der Menschen unter heißen Himmelsstrichen schneller als unter kalten schlägt, warum die Vegetation im Sommer besser von Statten gebe als im Winter etc. (a. a. O. S. 199.)
4) Polytechn. Centralblatt 1840, Bd. 2, Seite 863.
5) Annales des mines, IIe Serie, Tome V, 1829.
6) Handbuch der Wasserbaukunst. 1. Theil, S. 220 etc. 2. Aufl., 1853.
7) Transactions of the Institution of Civil Engineers. Vol. II. London 1838, p. 201.

oder nach Einführung der Wassermenge Q:

$$\varrho^{\frac{9}{4}} = \frac{4l}{h} Q^{\frac{7}{4}}.$$

Später *) behandelt Hagen die Frage über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren von Neuem höchst sorgfältig und mit Hinzufügung eigener Beobachtungen (an Röhren von $1\frac{1}{4}$ bis $2\frac{3}{4}$ Linien Durchmesser) zu den bereits bekannten.[2]) Indeß läßt sich auch aus diesen Versuchen ein bestimmter Schluß auf den Temperatureinfluß bei der Bewegung des Wassers in Röhren von größeren Durchmessern, wie solche in der Hydrotechnik Anwendung finden, nicht machen.

Weisbach[3]) empfiehlt neuerdings zur Ermittelung des Widerstandscoefficienten η für lange Röhren den Ausdruck

$$\eta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}} \text{ (Meter)},$$

dessen Zahlenwerthe, außer den bekannten 52 Versuchen (Seite 390), noch aus 11 selbst (bis auf 4,648 Meter Geschwindigkeit) angestellten, überhaupt aus 63 Versuchen, mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurden.

Für den praktischen Gebrauch berechnet Weisbach Tabellen für η, deren einer wir nachstehende Zusammenstellung entlehnen:

v	$0^m,1$	$0^m,2$	$0^m,3$	$0^m,4$	$0^m,5$	$0^m,7$	$1^m,0$	$1^m,1$	$1^m,2$	$1^m,3$	$1^m,4$	$1^m,5$	$2^m,0$	$3^m,0$
η	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0257	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0211	0,0199

Der bereits Seite 304 (Note) angeführte französische Ingenieur St. Venant[4]) entwickelte aus den bekannten 51 französischen Versuchen die Formel

$$\frac{h}{l} \cdot \frac{d}{4} = 0{,}00029557 \cdot v^{\frac{12}{7}} \text{ (Meter), oder}$$

$$v = 114{,}494 \left(\frac{d}{4} \cdot \frac{h}{l}\right)^{\frac{7}{12}},$$

---

1) Abhandlungen der Königlichen Academie der Wissenschaften, Jahrg. 1854.

2) Für enge Röhren, wie sie Hagen in Anwendung brachte, ist

$$h = m \cdot \frac{l \cdot v^{1,75}}{\varrho^{1,25}}$$

zu setzen, wobei $m = 0{,}000038941 - 0{,}0000017185 \sqrt{t}$ ist, alles auf Zolle bezogen und die Temperatur t in Réaumur Graden ausgedrückt.

3) Ingenieur-Mechanik, Bd. 1, S. 748, 3. Auflage.

4) Formules et Tables Nouvelles etc. Paris 1851, p. 71.

deren Werthe sich, nach einer vergleichenden Zusammenstellung seiner Abhandlung (a. a. O. S. 73) den Versuchen ungewöhnlich gut anschließt.

Am meisten Aufmerksamkeit scheinen die jüngsten Arbeiten Darcy's*) über den fraglichen Gegenstand zu verdienen, der nach eigenen zahlreichen Beobachtungen an Röhren aus verschiedenem Material (Eisen, Blei, Glas, neu so wie alt, aber von Niederschlägen gereinigt), bei Durchmessern von $0^m,01$ bis $0^m,50$ und mittleren Geschwindigkeiten von $0^m,03$ bis $0^m,50$ pr. Secunde, vor Allem zu dem bemerkenswerthen Resultate gelangte, daß die Beschaffenheit und der Zustand der Röhrenwände einen merklichen Einfluß auf die Wassermengen der Röhren ausübe.**) Uebrigens paßte er seine Versuche der Formel an:

$$\varrho \cdot \frac{h}{l} = b_1 v^2,$$

wobei b_1 ein Zahlenwerth ist, dessen Größe (nach dem Beispiele Young's) mit dem Halbmesser ϱ der Röhre veränderlich ist, nämlich für Metermaße

$$b_1 = 0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{\varrho}.$$

Zur weiteren Beurtheilung entlehnen wir folgende Werthe einer größeren Tabelle Darcy's (a. a. O. p. 383):

Durchmesser d (Meter)	Radien ϱ (Meter)	Coefficient b_1	$\frac{b_1}{\varrho}$	$\sqrt{\frac{\varrho}{b_1}}$
0,01	0,005	0,001801	0,36020	1,666
0,02	0,010	0,001154	0,11540	2,943
0,05	0,025	0,000765	0,030632	5,713
0,10	0,050	0,000636	0,012728	8,863
0,15	0,075	0,000593	0,007910	11,243
0,20	0,100	0,000571	0,005717	13,225
0,25	0,12[illegible]	0,000558	0,004470	14,956
0,30	0,150	0,000550	0,003667	16,512
0,35	0,175	0,000543	0,003108	18,936
0,40	0,200	0,000539	0,002696	19,256
0,50	0,250	0,000532	0,002131	21,659
0,60	0,30	0,000528	0,001761	23,823
0,80	0,40	0,000523	0,001307	27,650
1,00	0,50	0,000519	0,001039	31,010

*) Les Fontaines Publiques de la ville de Dijon. Paris 1856, p. 376.

**) Weisbach's Angaben, daß nach seinen Versuchen ordinaire hölzerne Röhren von $2\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$ Zoll Weite den Widerstandscoefficienten 1,75 mal so groß gaben als Metallröhren, stimmen damit überein.

Vorausgesetzt sind hierbei im Innern völlig reine und glatte Röhren. Sind die Wände bereits mit leichtem Niederschlag oder Oxyd bedeckt, so räth Darcy, sobald das einer bestimmten Geschwindigkeit correspondirende Gefälle gesucht wird, das berechnete Gefälle zu verdoppeln, oder wenn das Gefälle gegeben ist, nur die Hälfte davon zur Bestimmung der betreffenden Geschwindigkeit einzuführen.

Für die mittlere Geschwindigkeit v als Function der Geschwindigkeit V in der Axe der Röhre und der Geschwindigkeit W an den Wänden giebt Darcy den Ausdruck

$$v = \frac{3V + 4w}{7}.$$

§. 150.

Schreibt man zur Vereinfachung bei praktischen Rechnungen, ähnlich wie §. 122, $\frac{v^2}{k_1^2}$ statt $A'v + B'v^2$, d. h. setzt $k_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{A'}{v} + B'}}$, so ergiebt sich aus III, §. 149:

$$\text{I.} \quad h = \frac{v^2}{2g\varepsilon^2} + \frac{l}{d}\frac{v^2}{k_1^2},$$

oder auch, wenn der Widerstandscoefficient (Seite 169) $\eta = \frac{2g}{k_1^2}$ eingeführt und ferner $\frac{1}{\varepsilon^2} = 1 + \eta_1$ gesetzt wird:

$$\text{II.} \quad h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \eta_1 + \eta\,\frac{l}{d}\right).$$

Zur entsprechenden Vergleichung und Kenntnißnahme über die Variation der Coefficienten k_1 und η folgen hier zwei kleine Tabellen. *)

Für Meter.

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1,0	1,25	1,50
k_1	17,63	21,97	24,32	25,83	26,83	28,49	29,42	30,02	30,44
η	0,06311	0,04064	0,03316	0,0294	0,02725	0,02416	0,02266	0,02176	0,02118

*) $A' = 0{,}0002291$
$B' = 0{,}00092627$ für Meter } nach S.
$B' = 0{,}0002705$ für hannov. Fuß }

Für hannov. Fuß.

v	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4	5	6
k	29,02	37,04	41,67	44,74	50,96	53,69	55,24	56,23	56,91
η	0,07978	0,04898	0,03860	0,03357	0,02587	0,02331	0,02202	0,02125	0,02074

§. 151.

Bei der Berechnung von Röhrendurchmessern für praktische Ausführungen geben vorstehende Formeln fast insgesammt zu geringe Werthe, ein Uebelstand, der in der Natur der Sache liegt, da man, mit Ausnahme der Couplet'schen Versuche, alle anderen mit Röhren anstellte, deren Wände glatt und rein waren und überhaupt nicht der Beschaffenheit und dem Zustande entsprechen, in welchem sich selbst die besten Röhren, in mehr oder weniger Zeit des praktischen Gebrauches, befinden. So zeigt u. A. Darcy [1]), daß die Widerstandscoefficienten für die gebrauchten Wasserleitungsröhren von Dijon im Mittel doppelt so groß genommen werden müßten, als die seiner Formel, wobei neue Röhren vorausgesetzt werden. Aehnliche Erfahrungen haben andere Praktiker gemacht.

Die Klagen, selbst der rationellsten Ingenieure, über diese Sachlage sind hinlänglich bekannt. D'Aubuisson [2]) und Hagen [3]) rathen deshalb, um sicher zu gehen, bei den Berechnungen die Wassermengen um die Hälfte größer zu nehmen, als sie wirklich zu sein braucht, Dupuit [4]) aber empfiehlt, für die gewöhnlichen Fälle der Praxis, ein für allemal die Formel

$$d = \sqrt[5]{\frac{l}{h}\left(\frac{Q}{20}\right)^2}, \text{ oder}$$

---

1) Les Fontaines publiques de la ville de Dijon, p. 426.

2) Traité d'hydraulique, p. 242.

3) Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil, Seite 222. Zweite Auflage.

4) Traité de la distribution des eaux etc. Paris 1854, p. 58.

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{l}{h} Q^2} \text{ für Metermaß. *)}$$

Ein Ausdruck, von dessen praktischer Brauchbarkeit auch Referent vielfache Gelegenheit gehabt hat, sich zu überzeugen, und der bis auf Weiteres, statt allen früheren, auch nur Annäherungsformeln, in der Folge hier benutzt werden soll, wenn nicht besondere Umstände (wie sehr geringe Geschwindigkeiten) die Anwendung einer der anderen Formeln durchaus nothwendig machen.

Es entspricht hierbei der Widerstandscoefficient dem Werthe $\eta = \frac{1}{33} = 0{,}03030$, zu dessen weiteren Beurtheilungen die kleinen Tabellen des vorigen Paragraphen benutzt werden können.

Für hannoversche Fuße ergiebt sich daher

$$h = \frac{1}{33} \cdot \frac{1}{2.33{,}6} \cdot \frac{l}{d} v^2$$

und hieraus, wegen $v = \left(\frac{4Q}{d^2\pi}\right)$,

$$d = 0{,}2359 \sqrt[5]{\frac{l}{h} Q^2},$$

wofür man in den meisten Fällen, um die Formel leichter zu behalten, wird setzen können:

$$d = \frac{1}{4} \sqrt[5]{\frac{l}{h} Q^2} \text{ (hannov. Fuß).}$$

Anmerkung. Unter Annahme einer bestimmten Geschwindigkeit v, womit sich das Wasser in einer Röhre bewegen soll (für gewöhnliche Fälle von $0^m{,}6$ bis $1^m{,}0$) erhält man für den Durchmesser d

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = 1{,}128 \sqrt{\frac{Q}{v}}.$$

Beispiel 1. Welchen Durchmesser muß man der Hauptröhre einer Wasserleitung geben, wenn erstere 1450 Meter Länge hat und bei $5\frac{1}{3}$ Meter Druckhöhe pr. Stunde 140 Cubikmeter Wasser liefern soll? **)

---

*) Diese Formel ist fast dieselbe, welche d'Aubuisson in seiner Hydraulik, p. 226 (Nr. 190), für Geschwindigkeiten empfiehlt, welche $0^m{,}6$ übersteigen, indem er setzt:

$$d = 0{,}298 \sqrt[5]{\frac{l}{h} Q^2}.$$

**) Weisbach's Beispiel im Polytechn. Centralblatte 1840, Bd, 2, S. 877, zum Vergleiche mit Dupuit's Formel gewählt.

Erste Auflösung. Durch Einführung vorstehender Werthe in die Gleichung VI, §. 149, ergiebt sich:

$$d^5 - 0{,}0030847 \,.\, d^2 - 0{,}00003558 \,.\, d - 0{,}000617414 = 0.$$

Setzt man, um einen Annäherungswerth zu erhalten, $d^5 = 0{,}000617414$, so bekommt man vorläufig:

$$d = \sqrt[5]{0{,}000617414} = 0^m{,}2.$$

Führt man aber diesen Werth in das zweite und dritte Glied der genauen Gleichung ein, so erhält man

$$d^5 = 0{,}000617414 + 0{,}00012339 + 0{,}000007116, \text{ d. i.}$$

$$d = \sqrt[5]{0{,}0007479} = 0^m{,}237.$$

Nehmen wir ferner noch $d = 0^m{,}24$ an, so ergiebt sich:

$$d^5 = 0{,}000617414 + 0{,}000177678 + 0{,}000008539, \text{ folglich:}$$

$$d = \sqrt[5]{0{,}000803631} = 0^m{,}2404.$$

Zweite Auflösung. Aus ~~III~~ II, §. 150, reducirt man leicht, wenn $v = \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)$ gesetzt wird:

$$d = \sqrt[5]{\left[\frac{(1+\eta_1)d + \eta l}{2gh}\right]\left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2}.$$

Da hier d unter dem Wurzelzeichen vorkommt, so nehmen wir, der vorigen Auflösung entsprechend, $d = 0^m{,}2$ und finden demgemäß die mittlere Geschwindigkeit, womit sich das Wasser in der Leitung bewegt, zu $v = 0^m{,}86$, und folglich nach Weisbach *) $\eta = 0{,}025$. Ferner noch mit letzterem Hydrauliker $1 + \eta_1 = 1{,}505$ gesetzt, liefert:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1{,}505 \,.\, 0{,}24 + 0{,}025 \,.\, 1450)}{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, \frac{16}{5}}\left(\frac{4 \,.\, 7}{\pi \,.\, 180}\right)^2},$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{199{,}834}{313{,}920}\left(\frac{26}{\pi \,.\, 180}\right)^2}, \text{ d. i.}$$

$$d = 0^m{,}2436.$$

Dritte Auflösung. Mittelst Dupuit's Formel erhält man sofort:

$$d = \sqrt[5]{\frac{1450.3}{16}\left(\frac{140\,.}{3600.20}\right)^2} = 0^m{,}2525.$$

Hiernach wird zu rathen sein, bei der Ausführung zu nehmen:

$$d = 0^m{,}253.$$

---

*) Ingenieur-Mechanik, 3. Auflage, Bd. 1, S. 719 und S. 751.

Vierte Auflösung. Unter Voraussetzung einer bestimmten Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser in der Röhre bewegen soll, hätte man erhalten:

$d = 1{,}128 \sqrt{\frac{140}{3600} \cdot \frac{1}{1}} = 0^m{,}2224$, wenn $v = 1^m{,}0$ angenommen wurde,

$d = 1{,}128 \sqrt{\frac{140}{3600} \cdot \frac{1}{0{,}6}} = 0^m{,}2865$, wenn $v = 0^m{,}6$ angenommen wurde.

Beispiel 2. Man verlangt den Durchmesser einer 757 Meter langen Röhrenleitung zu kennen, welche bei 1,0 Meter Druckhöhe pr. Secunde 0.089 Cubikmeter Wasser liefert. *)

Erste Auflösung. Mit besonderer Berücksichtigung der Versuche von Couplet findet d'Aubuisson

$$d^5 - \left\{0{,}00009594 \frac{lQ}{h} \cdot d^2 + 0{,}0826 \frac{Q^2}{h} \cdot d + 0{,}00222 \frac{lQ^2}{h}\right\} = 0,$$

sowie, wenn man vorstehende Zahlenwerthe substituirt:

$$d^5 - (0{,}006464 \cdot d^2 + 0{,}0006547 \cdot d + 0{,}013318) = 0.$$

Zuerst das zweite und dritte Glied vernachlässigt, giebt:

$$d = \sqrt[5]{0{,}01338} = 0^m{,}4216.$$

Dieser Werth ist offenbar zu klein, weshalb $0^m{,}425$ in die Gleichung gesetzt werden mag, wodurch sie sich reducirt auf:

			$-\,0{,}00090 = 0;$
mit	0,427	liefert sie:	$-\,0{,}00058 = 0;$
„	0,430	„ „	$-\,0{,}00009 = 0;$
„	0,4306	„ „	$0 = 0.$

Der gesuchte Durchmesser ist sonach:

$$d = 0^m{,}4306.$$

Zweite Auflösung. Dupuit's Formel liefert wieder direct:

$$d = \sqrt[5]{\frac{757}{1} \cdot \left(\frac{0{,}089}{20}\right)^2} = 0^m{,}4316,$$

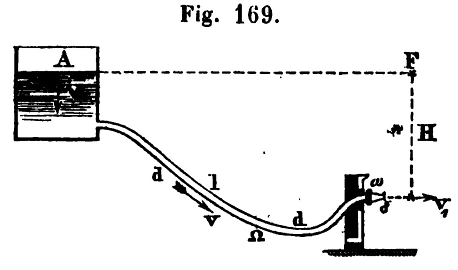
wonach man die praktische Ausführung beschaffen wird.

§. 152.

Ist das untere Ende einer Leitungsröhre vom Querschnitte $\Omega = \frac{d^2\pi}{4}$, wie bisher vorausgesetzt, nicht offen, sondern durch ein Mundstück, einen Schieber oder Hahn, Fig. 169, verengt, so daß der Querschnitt ω der Ausflußöffnung kleiner wie Ω ist, so

*) D'Aubuisson: Traité d'hydraulique, Nr. 191.

Fig. 169.



erhält man ohne Weiteres, ähnlich wie §. 149, wenn man, bis auf die Druckhöhe H, die derartigen Bezeichnungen beibehält, für die Bewegung des Wassers in dieser Leitungsröhre:

$$\tfrac{1}{2} M (V_1^2 - V^2) + \tfrac{1}{2} M (v_1 - v)^2 = gMH - \tfrac{1}{2} M\eta \frac{l}{d} v^2,$$

d. i. wegen $v_1 = \dfrac{\Omega}{\alpha a_1} v$ und $V_1 = \dfrac{\Omega}{\mu\omega} v$, so wie $V = \dfrac{\Omega}{A} v$:

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{A}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} Mv^2 \left(\frac{\Omega}{\alpha\alpha_1} - 1\right)^2 = gMH - \tfrac{1}{2} M\eta \frac{l}{d} v^2,$$

oder wenn A in Bezug auf Ω recht groß ist, ferner $\left(\dfrac{\Omega}{\alpha a_1} - 1\right)^2 = \eta_1$ gesetzt wird:

$$\tfrac{1}{2} Mv^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta_1 + \eta \frac{l}{d}\right] = gMH, \text{ d. i.}$$

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2gH}{\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta_1 + \eta \frac{l}{d}}}.$$

Ist η_1 klein genug, um vernachlässigt zu werden, und bildet die Mündung ω eine Kreisfläche vom Durchmesser $= \delta$, so ist $\dfrac{\Omega}{\mu\omega} = \dfrac{d^2}{\mu\delta^2}$, also:

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{d^4}{\mu^2\delta^4} + \eta \frac{l}{d}}}.$$

Führt man in letztere Gleichung die Wassermenge $= Q$ pr. Secunde ein, d. h. setzt $v = \dfrac{4Q}{d^2.\pi}$ und nimmt $\eta = \frac{1}{33}$ an, so folgt, für Metermaß, indem sodann $\dfrac{1}{2g} = 0{,}051$ ist, nach gehöriger Reduction:

$$\text{III.} \quad d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{H - 0{,}0826 \frac{Q^2}{\mu^2\delta^4}}},$$

so wie auch aus I. für $\eta_1 = 1$:

$$\text{IV.}\quad Q = 20\sqrt{\frac{H.d^5}{l + 33.d + \frac{33\,d^5}{\mu^2\delta^4}}}$$

oder genau genug:

$$\text{V.}\quad Q = 20\sqrt{\frac{H.d^5}{l + 33\frac{d^5}{\mu^2\delta^4}}}.$$

Beispiel. Es ist der Durchmesser einer 834 Meter langen Leitung zu bestimmen, die unter 6,5 Meter Druckhöhe, pr. Sec. 0,011 Cubikmeter Wasser durch mehrere Oeffnungen am unteren Ende ausgießen soll, deren Gesammtquerschnitt einer Kreisfläche von $0^m,04$ Durchmesser entspricht und wofür der betreffende Ausflußcoefficient zu 0,85 abgeschätzt ist.

Auflösung. Aus III. folgt ohne Weiteres:

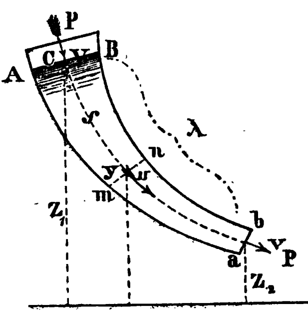
$$d = 0,3018\sqrt[5]{\frac{834.(0,011)^2}{6,50 - 5,498}} = 0^m,187.$$

[§. 153.]

Aehnlich wie bei Canälen läßt sich auch bei Röhren mit (gesetzmäßig) veränderlichen Weiten, die **ungleichförmige Bewegung** des Wassers in denselben durch eine Gleichung ausdrücken.

Mit Bezug auf Seite 158, und wenn man die dortigen Bezeichnungen beibehält, erhält man nämlich:

Fig. 170.



1. Für die mechanischen Arbeiten, welche die Pressungen P und p auf die Endflächen $\overline{AB}$ und $\overline{ab}$, Fig. 170, die Röhre von veränderlichen Querschnitten ausüben:

$$\omega u dt\,(P - p),$$

oder, wenn man die Masse des Volumens $\omega u dt$ mit m bezeichnet, wegen $m = \frac{\gamma\omega u dt}{g}$,

$$(1)\quad \frac{m.g}{\gamma}(P - p).$$

Ebenso für die gleichzeitigen mechanischen Arbeiten, welche der Schwerkraftswirkung entsprechen, wenn z_1 und z_2 beziehungsweise die Schwerpunktsabstände der Schichten $\overline{AB}$ und $\overline{ab}$ von einer beliebigen Horizontalebene bezeichnen:

$$(2)\quad mg\,(z_1 - z_2).$$

Endlich für die widerstehende Arbeit, welche das Wasser in der Röhre erfährt, wenn $mn = 2y$ den veränderlichen Durchmesser des kreisförmigen Röhrenquerschnittes bezeichnet, $Cu = s$ und λ die ganze Röhrenlänge ist:

$$(3) \quad \int_0^\lambda \frac{ds}{2y}(A'u + B'u^2) \, . \, m \, . \, g.$$

Setzt man daher V und v die Geschwindigkeiten beziehungsweise in den Schichten AB und ab, so liefert das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte die Gleichung:

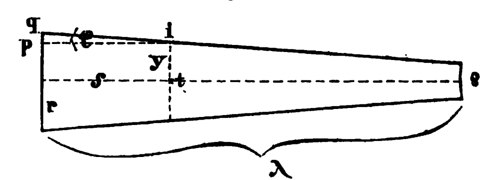
$$\tfrac{1}{2}m(v^2 - V^2) = \frac{mg}{\gamma}(P - p) + mg(z_1 - z_2) - \int_0^\lambda m \, . \, g \, . \, \frac{ds}{2.y}(A'u + B'u^2),$$

oder auch mit Bezug auf §. 150 und wenn man durch mg dividirt:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} + z_1 - z_2 - \frac{1}{2k_1^2}\int_0^\lambda \frac{ds}{y} \, . \, u^2.$$

Zusatz. In dem besonderen Falle, daß bei einer Röhre von der Länge λ, Fig. 171, die kreisförmigen Querschnitte, also auch deren Radien r und ϱ, mit λ gleichförmig abnehmen, läßt sich die allein zur Bewältigung d. Röhrenwiderstandes erforderliche Druckhöhe $= h_1$, unmittelbar durch Auflösung der Gleichung:

Fig. 171.



$$h_1 = \frac{1}{2k_1^2}\int_0^\lambda \frac{ds}{y} u^2$$

wie Nachstehend auffinden.

Man drücke zuerst den veränderlichen Röhrenhalbmesser $\overline{it} = y$ durch s aus, was wie folgt geschehen kann.

Es verhält sich $\overline{pq} : \overline{pi} = r - \varrho : \lambda$, d. i.

$$\overline{pq} = \frac{s(r-\varrho)}{\lambda}, \text{ daher ist}$$

$$\overline{it} = y = r - \frac{s(r-\varrho)}{\lambda} = r\left[1 - \frac{s(r-\varrho)}{\lambda r}\right].$$

Zur Abkürzung setzen wir $\frac{r-\varrho}{\lambda . r} = A$, erhalten also:

$$y = r(1 - As).$$

Ferner ist $u^2 = \left(\frac{\varrho}{y}\right)^4 v^2$, daher

$$h_1 = \frac{\varrho^4 v^2}{2k_1^2} \int_0^\lambda \frac{ds}{y^5}, \text{ oder}$$

$$h_1 = \frac{\varrho^4 v^2}{2k_1^2 r^5} \int_0^\lambda \frac{ds}{(1-As)^5}, \text{ d. i.}$$

$$h_1 = \frac{1}{8} \frac{\varrho^4 v^2}{Ak_1^2 r^5} \left[\frac{1}{(1-A\lambda)^4} - 1\right],$$

hier für A den obigen Werth eingeführt, giebt

$$h_1 = \frac{1}{8} \frac{v^2}{k_1^2} \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \frac{\lambda}{r-\varrho}.$$

Wird endlich der Convergenzwinkel der Röhre, d. i. piq, mit φ bezeichnet, so ist $\frac{\lambda}{r-\varrho} = \text{cotg.}\, \frac{1}{2}\varphi$ und sonach:

$$h_1 = \frac{1}{8} \frac{v^2}{k_1^2} \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \text{cotg.}\, \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Beachtet man noch, daß $k_1^2 = \frac{2g}{\eta}$ gesetzt werden kann, so folgt überdies:

$$(1)\quad h_1 = \frac{1}{8} \eta \frac{\lambda}{r} \left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right) \frac{v^2}{2g}, \text{ oder}$$

$$h_1 = \frac{1}{8} \eta \,.\, \text{cotg.}\, \tfrac{1}{2}\varphi \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Den Ausdruck (1) entwickelte zuerst Gerstner in seinem Handbuche der Mechanik fester Körper (Bd. 2, Seite 288). Nach Weisbach's Angaben (Ing. Mech., Bd. 1, S. 755) soll derselbe recht gut mit den Versuchen übereinstimmen. Letzterer Hydrauliker berechnet übrigens:

$$h_1 = \frac{1}{8} \eta \,.\, \text{cosec.}\, \tfrac{1}{2}\varphi \left(1 - \frac{\varrho^4}{r^4}\right) \frac{v^2}{2g},$$

was daher rührt, daß er nicht Längenstücken der Röhre wie pi, sondern qi in Rechnung bringt. Bei so kleinen Winkeln φ wie hier vorkommen ist jedoch diese Verschiedenheit ohne Einfluß auf das Endresultat.

Zum Schlusse mögen hier einige Rechnungsresultate zusammengestellt werden, welche sich auf conisch convergente Ausgußröhren (Standrohr und Mündung) bei Feuerlöschspritzen beziehen.

	$2r$	2ϱ	λ	h_1	h_1 für $\eta = 0{,}02$
Nach Karsten *) . .	18 Lin.	$7\frac{1}{2}$ Lin.	504 L.	$11{,}363 . \eta \frac{v^2}{2g}$	$0{,}232 . \frac{v^2}{2g}$
Nach Redtenbacher, Wagenspritze, Nr. 1 **)	70^{mm}	21^{mm}	940^{mm}	$4{,}757 . \eta . \frac{v^2}{2g}$	$0{,}09514 . \frac{v^2}{2g}$
Desgleich., Wagenspritze Nr. 3 . .	50	15	670	$4{,}747 . \eta . \frac{v^2}{2g}$	$0{,}09494 . \frac{v^2}{2g}$
Gußrohr, der Stadt Hannover Feuerlöschspritzen, als besonders gut empfohlen, aus drei Theilen bestehend	52 31 24	31 24 14	739 42 149	$11{,}940 . \eta . \frac{v^2}{2g}$	$0{,}2388 . \frac{v^2}{2g}$

Hiernach wären die von Redtenbacher angegebenen Dimensionen conischer Ausgußröhre, hinsichtlich der zu überwindenden Widerstände, die vortheilhaftesten.

§. 154.

Verengungen, Erweiterungen und Richtungsveränderungen bei Wasserleitungsröhren.

Verengungen und Erweiterungen in Wasserleitungsröhren erzeugen Geschwindigkeits- und demnach Druckhöhenverluste, deren Größen nach §. 73 vollständig zu beurtheilen und zu berechnen sind.

Eben solche Verluste bewirken aber auch Richtungsveränderungen, die entweder durch Krümmungen oder durch völlige Ecken der Röhren (Knieröhren) veranlaßt werden.

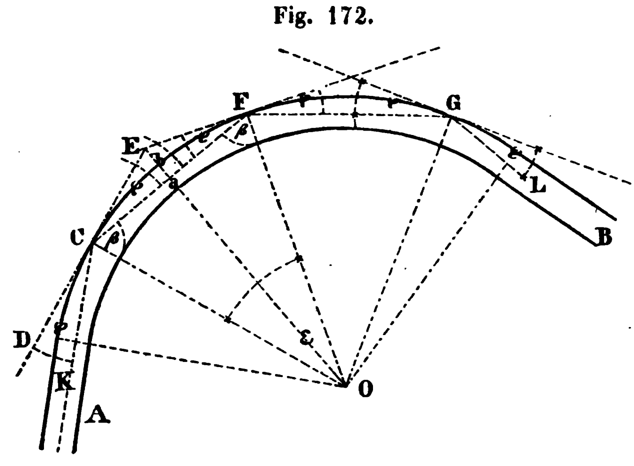
Die Größe der Wirkung derartiger Richtungsveränderungen ist bis jetzt ganz allein durch Versuche zu ermitteln gewesen, deren Resultate man in Formeln darzustellen bemüht war.

Um diese zu verstehen werde zuvor bemerkt, daß wenn, wie in Fig. 172, die verlängerte Axe $\overline{KC}$ einer geraden Röhre

*) Gekrönte Abhandlung über Feuerspritzen. Greifswalde 1773. Auch Gerstner Mechanik, Bd. 2, S. 228.

**) Resultate für den Maschinenbau. Dritte Auflage. Seite 314.

Fig. 172.



die krumme Röhrenwand bei *C* trifft und an diesem Punkt die zugehörige Kreistangente *DE* gezogen wird, der Winkel *KCD* der Anprallungs- oder Reflexionswinkel heißt, und wenn man diese Construction fortsetzt, also von *C* abermals die Röhrenaxe bei *a* zu tangiren sucht und die Wand abermals in *F*, ferner so fort noch in *G* u. s. w. trifft, als dann gesagt wird: „die Röhre habe eine Krümmung von zwei, drei oder mehreren Anprallungen". Der Centriwinkel *KOL*; welcher dem ganzen vorhandenen Röhrenbögen *KL* entspricht, wird der Krümmungswinkel genannt. In einem folgenden Beispiele wird gezeigt, wie man die Anprallungswinkel einer krummen Röhrenstrecke ermitteln kann.

Die ersten brauchbaren Versuche über diesen Gegenstand hat Dubuat angestellt und daraus den Schluß gebildet, daß der Krümmungswiderstand einer Röhrenleitung dem Quadrate der Geschwindigkeit des darin sich bewegenden Wassers und der Summe der Quadrate der Sinus sämmtlicher Anprallungswinkel proportional sei. Aus 25 seiner Messungen leitete Dubuat ferner eine Gleichung für den Verlust an Druckhöhe $= h'$ ab: *)

$$h' = \frac{v^2 . s^2}{3000},$$

wenn pariser Zollmaß vorausgesetzt wird, und $s = \Sigma (\sin \varphi^2)$, die bemerkte Sinussumme so wie v die Geschwindigkeit des Wassers bezeichnet. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Größe der Anprallungswinkel 36 Grad nicht überschreitet.

---

*) Principes, Nr. 105 und Nr. 357.

Für Metermaß erhält man aus letzterer Formel:

$$\text{I.}\quad h' = 0{,}0123\,.\,v^2\,.\,\Sigma\,(\sin\varphi^2),$$

oder, wenn man v entfernt und die Wassermenge pr. Sec. $= Q$ so wie den Röhrendurchmesser d einführt:

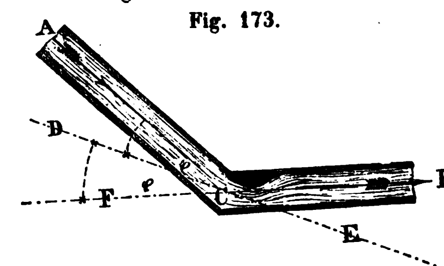
$$\text{I}^a.\quad h' = 0{,}02\,\frac{Q^2}{d^4}\,\Sigma\,(\sin\varphi^2).$$

Navier *) empfiehlt, wahrscheinlich auf dieselben Versuche gestützt, den Ausdruck:

$$\text{II.}\quad h' = (0{,}0039 + 0{,}0186\,.\,r)\,\frac{\lambda}{r^2}\,.\,\frac{v^2}{2g}\ \text{(Meter)},$$

worin λ die Länge des Bogens ist, welcher den Krümmungswinkel ($\angle\, KOL$, Fig. 172) entspricht und r den zugehörigen Krümmunghalbmesser bezeichnet.

Fig. 173.



Die umfangreichsten und zuverlässigsten Versuche über Knieröhren, Fig. 173, hat Weisbach **) angestellt und daraus zur Berechnung des Verlustes an Druckhöhe $= h_2$ die Gleichung abgeleitet:

$$\text{III.}\quad h_2 = (0{,}9457\,.\,\sin\varphi^2 + 2{,}047\,.\,\sin\varphi^4)\,\frac{v^2}{2g}.$$

Hierbei bezeichnet φ den Anprallwinkel $ACD = DCF$, Fig. 173, oder den halben Ablenkungswinkel ACF,

$$\text{Hiernach wird } h_2 \left\{ \begin{array}{ll} 0{,}046\,.\,\frac{v^2}{2g} & \text{wenn } \varphi = 10^0 \\ 0{,}139\,.\,\frac{v^2}{2g} & \text{,,}\quad \varphi = 20^0 \\ 0{,}364\,.\,\frac{v^2}{2g} & \text{,,}\quad \varphi = 30^0 \\ 0{,}984\,.\,\frac{v^2}{2g} & \text{,,}\quad \varphi = 45^0 \\ \text{etc.} & \end{array} \right.$$

*) Résumé des Leçons etc. Deuxième Partie, Nr. 119.
**) Ingenieur-Mechanik. Dritte Auflage. Seite 767.

Im letzteren Falle ist der Ablenkungswinkel $2\varphi = 90^{\circ}$, wobei also der Druckhöhenverlust ziemlich der Geschwindigkeitshöhe gleich kommt.

Die allgemeine Gleichung I, §. 152, läßt sich schreiben:

$$\text{IV.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta\frac{l}{d} + \Sigma\eta_n}}.$$

wenn man mit $\Sigma\eta_n$ die Widerstandscoefficienten aller passiven Widerstände bezeichnet, welche in der Leitung, außer dem Röhrenwiderstande an sich, vorkommen.

Beispiel 1. Eine Wasserleitungsröhre von $0^m,25$ Durchmesser führe pr. Sec. 0,05 Cubikmeter Wasser ab, wobei der zugehörige Krümmungswinkel (KOL, Fig. 172) $119\frac{1}{5}$ Grad, der Krümmungshalbmesser der kreisförmig gekrümmten Röhre $2^m,10$ beträgt; man verlangt die Größe der durch diese Krümmung verlorenen Druckhöhe zu kennen?

Auflösung. Man hat zuerst die Anzahl und Größe der Anprallungswinkel $DCK = \varphi$ zu bestimmen, was folgendermaßen geschieht. Es sei $\angle COF = \varepsilon$, daher $ab = r\,(1 - \cos\frac{1}{2}\varepsilon)$, oder weil $\varepsilon = 2\varphi$, auch $ab = r\,(1 - \cos\varphi)$. Es ist aber ab der halbe Röhrendurchmesser $= \frac{d}{2}$, folglich:

$$\text{sin. vers. } \varphi = \frac{d}{2r}.$$

Da nun in unserer Aufgabe $d = 0,25$ und $2r = 4,20$ ist, so folgt

$$\text{sin vers. } \varphi = \frac{0,25}{4,2} = \frac{0,125}{2,1} = 0,0595,$$

wozu $\varphi = 19^{\circ}\,52'$ gehört, so daß also die vorhandene Zahl $= n$ der Anprallungswinkel beträgt:

$$n = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{119^{\circ}\,12'}{19^{\circ}\,52'} = 3.$$

Daher nach Dubuat's Formel I^a:

$$h' = 0,02 \cdot \frac{(0,05)^2}{(0,25)^4} \cdot 3 \cdot \sin^2 (19^{\circ}\,52') = 0^m,00442.\ *)$$

Mittelst der Navier'schen Formel II. berechnet sich h' zu fast gleicher Größe.

Man erhält nämlich, wegen $\frac{1}{2g} = 0,051$ (Metermaß),

*) d'Aubuisson: Traité d'hydraulique, p. 235.

$$h_1 = \left(\frac{0{,}0002}{r} + 0{,}00095\right) v^2 \, . \, \frac{\lambda}{r}.$$

Oder da $\frac{\lambda}{r}$ = Bogen 119° 12′ und $r = 2{,}10$ ist,

$$h_1 = (0{,}000095 + 0{,}00095) \, . \, 2{,}08043 \, . \, v^2$$

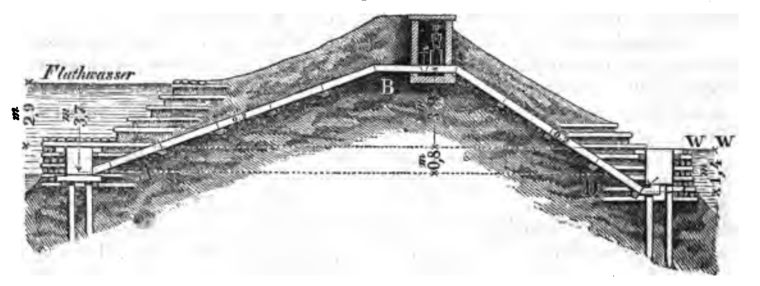
$$h_1 = 0{,}002174 \, . \, v^2,$$

oder da $v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{0{,}050}{0{,}049} = 1^m{,}02$ ist,

$$h_1 = 0^m{,}0046183.$$

Beispiel 2. Welche Wassermenge führt pr. Secunde der Heber Fig. 56 (Seite 122) von B nach WW, wenn die wirksame Druck-

Fig. 56.



höhe $2^m{,}9$, der Röhrendurchmesser $0^m{,}2$ und die Länge der Röhre $20^m{,}0$ beträgt, endlich jeder der Ablenkungswinkel des Hebers bei B zwanzig Grad, also jeder Anprallungswinkel 10° beträgt? Vorausgesetzt ist dabei, daß während der Zeit die Druckhöhe constant bleibt. *)

Auflösung. Nimmt man die Verluste beim Eintritte und Austritte des Wassers als gering genug an, so erhält man nach IV, wegen $\Omega = \mu\omega$ und mit Beachtung von III. ($\Sigma\eta_n = 2 \, . \, 0{,}046 = 0{,}092$):

$$v = \sqrt{\frac{2 \, . \, 9{,}81 \, . \, 2{,}9}{1 + \frac{1}{33}\frac{20}{0{,}2} + 0{,}092}} = 3^m{,}715,$$

*) Die Zeit, wann, unter Voraussetzung eines gleichförmigen Sinkens des Wasserspiegels, die Druckhöhe H auf x herabgekommen sein sollte, berechnet sich nach §. 78, Gleichung 4, zu:

$$t = \frac{2A}{a}(\sqrt{H} - \sqrt{x}) \sqrt{\frac{1 + \eta\frac{l}{d} + \Sigma\eta_n}{2g}},$$

wo $\Sigma\eta_n$ die Summe der Widerstandscoefficienten bezeichnet, welche Krümmungen und Verengungen entsprechen.

so wie

$$Q = \frac{d^2\pi}{4} \cdot v = 0{,}785 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 3{,}715,$$

$$Q = 0{,}1166 \text{ Cub. Meter.}$$

Anmerkung. Wie aus den beiden letzteren Beispielen erhellt, sind bei nicht zu großen Geschwindigkeiten (unter $1^m{,}3$) die Verluste an Druckhöhe wegen Krümmungen und Kniestücken der Röhren unerheblich, sobald die betreffenden Anprallungswinkel und Krümmungshalbmesser entsprechend klein sind. Bei zweckmäßig und vortheilhaft angelegten Leitungen kann man daher auch (man beachte insbesondere die Aufgabe §. 158) ganz von diesen Richtungs- und Geschwindigkeitsverlusten absehen, zumal wenn man mit Dupuit den Widerstandscoefficienten allgemein zu $\eta = \frac{1}{83}$ annimmt und außerdem, bei Berechnung der Röhrendurchmesser, mit d'Aubuisson die fortzuführende Wassermenge um die Hälfte vergrößert einführt.

Bemerkenswerth, außer dem ähnlich lautenden Urtheile des letztgenannten Hydraulikers, sind noch die Ansichten anderer erfahrener, rationeller Praktiker über den Einfluß der Krümmungen und Verengungen, wovon wir hier Nachstehendes mitzutheilen für unseren Zweck nicht unangemessen halten.

Hagen **) bemerkt zunächst, daß die theoretische Bestimmung des Einflusses der Krümmungen, so wie die Anwendung, die man davon machen kann, sehr unsicher sei, und fährt dann folgendermaßen fort: „da aber wahrscheinlich das Wasser beim Durchgange durch weite Röhren eine starke innere Bewegung annimmt, so sollte man kaum glauben, daß der Einfluß von mäßigen und sanften Krümmungen überhaupt noch merklich wäre. Eine bleierne Röhre von $\frac{1}{3}$ Zoll Weite und 8 Fuß Länge gab genau gleiche Resultate, wenn ich ihr eine kreisförmige Windung gab, oder wenn ich sie in gerade Linie auszog."

„Verengungen muß man möglichst zu vermeiden suchen, man darf aber nicht annehmen, daß sie, wenn sie nur mäßig sind, eine starke Verminderung der Wassermenge bedingen, denn zur Erzeugung der hier nöthigen Geschwindigkeit wird zwar ein gewisser Theil der Druckhöhe consumirt, aber eben diese größere Geschwindigkeit liefert auch wieder die lebendige Kraft zur Ueberwindung der Widerstände im folgenden Theile der Röhrenleitung. Ich fand, daß die Wassermenge, sobald ich die Einmündung der Röhre um die Hälfte ihres Querschnittes verengte, unverändert blieb; brachte ich aber eine gleiche Verengung an der Ausmündung der Röhre an, so gab sich eine starke Abnahme der Wassermenge zu erkennen, indem die zur Erzeugung der größeren Geschwindigkeit erforderliche lebendige Kraft in diesem Falle vollständiger Verlust war."

Bei Dupuit ***) findet sich folgende Notiz: „Nous avons fait quelques expériences pour determiner l'influence du changement brusque

---

*) D'Aubuisson: Traité d'Hydraulique, p. 235, 243 und 257.

**) Handbuch der Wasserbaukunst. 1. Theil, S. 225. 2. Auflage.

***) Distribution des eaux, Nr. 62. Dupuit macht hierbei auf die bei Weitem nachtheiligeren Einflusse von gekrümmten Röhren aufmerksam, welche in verticaler Ebene liegen, wobei in der dem

de direction des conduites. Ces expériences nous ont convaincu que la découverte d'une formule qui donnerait exactement l'influence des angles dans les conduites ne saurait avoir beaucoup d'utilité pratique etc.

Il va sans dire qu'il ne faut pas multiplier sans nécessité les coudes et les sinuosités; mais quand ils sont motivés par l'état des lieux, et qu'on ne pourrait les faire disparaître qu'avec de grandes dépenses, il faut s'y résigner. La moindre augmentation du diamètre de la conduite dans cette partie ferait plus que compenser la perte de charge due à ces circonstances.

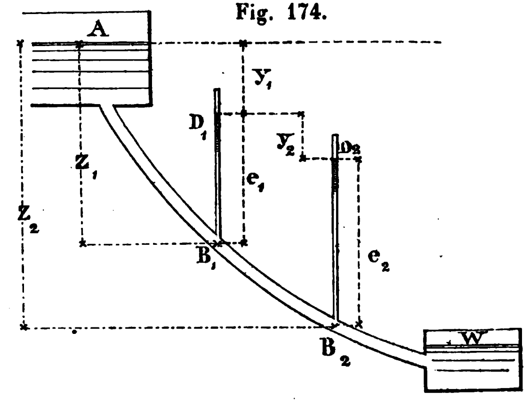
Darcy (Font. Publ. p. 426) macht sogar folgenden Schluß: „Quant aux coudes, je n'en parle pas, les pertes de charge qu'ils occasionnent ne sont pas à considérer dans le pratique."

§. 155.

Druck des Wassers gegen die Wände der Röhrenleitung.

Die zuerst von Daniel Bernouilli entdeckten und mathematisch dargestellten Gesetze über den Druck bewegten Wassers gegen Röhrenwände, wurden bereits §. 69 erörtert und dabei hauptsächlich in Erfahrung gebracht, daß der hydraulische Druck stets geringer sei, als der unter sonst gleichen Umständen stattfindende hydrostatische Druck. Noch geringer ist jedoch dieser Druck in Röhren der unmittelbar vorher betrachteten Art, d. h. wo auf Widerstände wegen Adhäsion, Cohäsion, Richtungs- und Geschwindigkeitsänderung Rücksicht zu nehmen ist.

Fig. 174.



Für die Druckhöhe $\frac{\Pi_1}{\gamma}$ an einem Punkte B_1, Fig. 174, welcher um Z_1 unter dem Wasserspiegel im Speisebassin A liegt, erhält man nämlich jetzt:

Himmel zugekehrten Convexität sich Luft im Scheitel ansammelt, dadurch eine Verengung, folgeweise eine Geschwindigkeitsvermehrung und ein großer Verlust an Druckhöhe erzeugt und selbst der ganze Abfluß unterbrochen werden kann. Man umgeht diesen Uebelstand, wenn man an der convexen Scheitelstelle sogenannte Windstöcke (ventouses) anbringt, welche Luft entweichen lassen, ohne daß dabei Wasser mit entweicht. Abbildungen bei Darcy, p. 409.

$$\frac{\Pi_1}{\gamma} = Z_1 + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} - \eta \frac{l_1}{d}\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} . \Sigma\eta_1;$$

eben so für einen Punkt B_2, der um Z_2 unter A sich befindet:

$$\frac{\Pi_2}{\gamma} = Z_2 + \frac{P}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} - \eta \frac{l_2}{d}\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \Sigma\eta_2.$$

Daher auch ferner:

$$(1) \quad \frac{\Pi_2}{\gamma} - \frac{\Pi_1}{\gamma} = Z_2 - Z_1 - \eta\frac{v^2}{2g}\left(\frac{l_2}{d} - \frac{l_1}{d}\right) - \frac{v^2}{2g}(\Sigma\eta_2 - \Sigma\eta_1).$$

Bringt man nun in B_1 und B_2 (ähnlich wie Seite 155, Fig. 67) verticale Röhrchen B_1D_1 und B_2D_2 an, welche unterhalb mit der Leitung communiciren, oberhalb aber in die freie Luft münden, so wird man offenbar durch die Höhen, auf welche sich das Wasser darin erhebt, die Drücke an den betreffenden Stellen der Röhre messen können. Aus letzterem Grunde giebt man diesen Röhrchen den Namen Piezometer. *)

Bezeichnet man nun die Piezometerstände bei B_1 und B_2 beziehungsweise mit e_1 und e_2, und beachtet, daß nach §. 51 die den Atmosphärendruck messende Wassersäule $10^m,336$ Höhe hat, so ergiebt sich

$$\frac{\Pi_1}{\gamma} = 10,336 + e_1 \quad \text{und} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma} = 10,336 + e_2,$$

und daher aus (1):

$$(2) \quad e_2 - e_1 = Z_2 - Z_1 - \eta\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\Sigma\eta_n.$$

Beachtet man endlich, daß der Figur 174 nach

$$Z_2 = y_1 + y_2 + e_2 \quad \text{und} \quad Z_1 = y_1 + e_1$$

ist, so erhält man aus (1):

$$(3) \quad y_2 = \eta\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} . \Sigma\eta_n.$$

Hieraus folgt aber der Satz „daß der Widerstand, welchen eine Leitung, dem Wasser zwischen zwei von einander entfernten Punkten entgegengesetzt, unmittelbar durch den Höhenunterschied der Oberflächen der an diesen aufgesetzten Piezometer angegeben wird“.

Zugleich erkennt man, daß nach dem Stande zweier auf einander folgenden Piezometer die Widerstände zu beurtheilen sind, welche zwischen den betreffenden Punkten regelmäßig oder zufällig auftreten.

---

*) πιέζω, drücken, pressen.

Aus der bekannten (gemessenen) Differenz der Piezometerstände zweier nicht zu naher und doch innerhalb regelmäßiger Strecke einer Leitung liegender Punkte, läßt sich annäherungsweise die Geschwindigkeit berechnen, womit das Wasser in der Röhre fließt und folglich auch das Wasserquantum, sobald der Durchmesser der Röhre bekannt ist.

Beispiel. An der großen Fontaine zu Herrenhausen bei Hannover verlangte man, eines Umbaues wegen, die Bestimmung der Wassermenge, welche pr. Secunde in der Röhrenleitung, aus zwei Strängen bestehend, jeder von 1 Fuß Durchmesser, zugeführt wurde. Zu diesem Ende brachte man an zwei Punkten der Leitung, die um 1779 Fuß hannov. von einander abstanden, Piezometer (Manometer nach Bourdon) an, wobei das der Wasserkunst nahe stehende 3,7 Atmosphäre, das nahe der Fontaine 3,56 Atmosphäre Spannung (als Mittelwerthe) zeigte. Wie berechnet sich hiernach die Wassermenge?

Auflösung. Die Piezometerdrücke auf Wassersäulen in hannov. Fußen reducirt, giebt:

$$Y_2 = 35{,}4\,(3{,}70 - 3{,}56) = 4{,}956.$$

Rechnet man dann einmal die Geschwindigkeitshöhe für den Widerstand in den geringen vorhandenen Krümmungen, so erhält man aus (3):

$$4{,}956 = \frac{1}{33} \cdot \frac{1779}{1} \cdot \frac{v^2}{2.33{,}6} + \frac{v^2}{2.33{,}6}, \text{ und deshalb:}$$

$$v = \sqrt{\frac{33.333{,}04}{1812}} = 2{,}426 \text{ Fuß.}$$

Hiernach also die pr. Sec in den Röhren fortfließende Wassermenge $= Q$:

$$Q = 2 \cdot \frac{d^2\pi}{4} \cdot v = \frac{\pi}{2} \cdot v = 3{,}80 \text{ Cubikfuß.*)}$$

§. 156.

Wasserleitungssystem.

In den meisten Fällen der Praxis hat man es bei vorkommenden Rechnungen nicht mit einer einzigen Röhrenleitung von unveränderlichem Durchmesser, sondern in der Regel mit einer Hauptröhre zu thun, welche das Wasser einem ganzen Systeme von Neben- und Zweig-Röhren zuführt.

Um in einem solchen Falle die Auflösung betreffender Aufgaben, z. B. die Berechnung der verschiedenen Röhrendurch-

*) Der etwas großen Schwankungen des Manometers wegen, welches nahe der Wasserkunst aufgestellt war, ist diese Berechnung weniger genau, als die später §. 159 folgende, denselben Gegenstand betreffend.

messer, im vollen Umfange der mathematischen Anforderungen zu bewirken, gelangt man zu verwickelten Rechnungen, die fast ohne praktischen Werth sind. *)

Um den Anforderungen der Ausführungen zu genügen, nimmt man daher zu Annäherungsrechnungen seine Zuflucht, die aufgeführt werden sollen, sobald auf einige besondere, bisher nicht erwähnte Umstände aufmerksam gemacht worden ist.

Sobald nämlich vom Hauptrohre *AD*, Fig. 175, einer Leitung ein Zweigrohr *EF* abgeht, so findet an letzterer Stelle begreiflicher Weise sowohl eine Veränderung der Querschnitte, als auch der Richtung der bewegten Schichten statt, wodurch offenbar Druckhöhenverluste bewirkt werden, deren Größe von der Geschwindigkeit der Bewegung, dem Durchmesser und dem Richtungswinkel abhängen wird, worüber jedoch zur Zeit die Theorie mindestens keine bestimmte Auskunft zu ertheilen vermag.

Fig. 175.

Glücklicher Weise sind diese Verluste bei den verhältnißmäßig geringen Geschwindigkeiten, womit sich das Wasser in den gewöhnlichen Leitungen bewegt, sehr gering, und wird man sich daher bis auf Weiteres für praktische Rechnungen mit den Resultaten einiger deshalb von Mallet und Génieys **) an den pariser Wasserleitungen angestellten Beobachtungen begnügen können, wonach der Verlust an Druckhöhe, der durch eine solche Verzweigung (érogation) herbeigeführt wird, ungefähr gleich *zweimal der Höhe* ist, welche *der Geschwindigkeit in der Nebenröhre* *EF* entspricht.

Anmerkung. Eine andere Frage, ob nämlich eine Verschiedenheit der Pressungen in der Hauptröhre bei *AB* oberhalb und bei *CD* unterhalb der Abzweigung *EF* stattfindet, hat d'Aubuisson, durch Beobachtung von Piezometern an den betreffenden Stellen, mit Nein beantwortet, d. h. er hatte die betreffenden Piezometerstände bei *AB* und *CD* einander gleich gefunden. ***) Indeß läßt die Genauigkeit,

*) Unter Andern Eytelwein: „Ueber die Anordnung der Röhrenleitungen mit Verzweigungen und die Bestimmung ihrer Abmessungen unter gegebenen Umständen.“ Crelle, Journal für die Baukunst, Bd. 15, Seite 297.

**) d'Aubuisson: Traité d'hydraulique. Nr. 218.

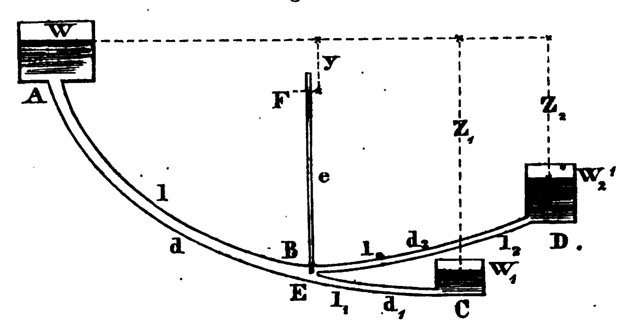
***) Ebendaselbst. Nr. 219. — Von diesen Gegenständen, so wie von dem ganzen Artikel über Bewegung des Wassers in Röhren der d'Aubuisson'schen Hydraulik, hat Crelle eine deutsche Bearbeitung in seinem Journale für die Baukunst, Bd. 17, S. 289 geliefert.

womit diese Beobachtungen angestellt wurden, mancherlei zu wünschen übrig.

§. 157.

Wir sind nunmehr im Stande, die erforderlichen Rechnungen (für praktische Zwecke) zur Anlage eines ganzen Röhrensystemes führen zu können. Als Prototyp hierzu, für den einfachsten Fall, sei AB, Fig. 176, das Hauptrohr einer Leitung von der Länge l

Fig. 176.



und dem Durchmesser d, von welchem Rohre bei B zwei Zweige BC und BD abgeführt werden, deren Längen beziehungsweise l_1 und l_2 mit den Durchmessern d_1 und d_2 sind. Die Abstände der Wasserspiegel der Behälter C und D, in welche die Zweigröhren münden, von der Wasseroberfläche im Hauptbehälter AW, möge beziehungsweise mit Z_1 und Z_2 bezeichnet werden, während der Piezometerstand bei E, d. i. $BF = e = H - y$ sein mag, wobei H die Tiefe von B unter dem Wasserspiegel in A und y den Verlust an Druckhöhe darstellt, welcher auf der Strecke von A bis E stattfindet. Werden endlich für die drei Röhrenabtheilungen AE, ED und EC die Geschwindigkeiten beziehungsweise mit v, v_1 und v_2, die Wassermengen mit Q, Q_1 und Q_2 bezeichnet, so ergeben sich, nach dem Früheren, ohne Weiteres folgende Gleichungen:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$y = \eta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \text{und} \quad Q = \tfrac{1}{4} \pi d^2 v;$$

$$z_1 - y = \eta \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{»} \quad Q_1 = \tfrac{1}{4} \pi d_1^2 v_1;$$

$$z_2 - y = \eta \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{»} \quad Q_2 = \tfrac{1}{4} \pi d_2^2 v_2$$

Sind nun beispielsweise die Wassermengen Q, Q_1 und Q_2, die Höhen z_1 und z_2, so wie die Längen l, l_1 und l_2 gegeben, und sollen die Durchmesser d, d_1 und d_2 berechnet werden, so hat man es mit 7 Unbekannten (außer den Durchmessern mit y, v, v_1 und v_2) zu thun, während überhaupt nur 6 Gleichungen vorhanden sind, weshalb die Aufgabe im mathematischen Sinne eine Unbestimmte ist.

Für den praktischen Fall, welcher hier verfolgt werden soll, kann man jedoch im Voraus eine der Unbekannten, z. B. die Geschwindigkeit für die Hauptröhre (zu 1^m bis $1^m,3$) annehmen, oder auch für y einen geeigneten Werth einführen, in welchem Falle man nur zu beachten nöthig hat, daß y sowohl kleiner wie z_1 als auch wie z_2 gewählt werden muß.

Nach der ersten Annahme berechnet man also

$$d = \frac{4Q}{\pi . v}, \text{ findet } y = \frac{l}{d^5}\left(\frac{Q}{20}\right)^2 \text{ u. s. w.,}$$

während nach der zweiten Annahme erhalten wird:

$$d = \sqrt[5]{\frac{l}{y}\left(\frac{Q}{20}\right)^2};\ d_1 = \sqrt[5]{\frac{l}{z_1 - y}\left(\frac{Q}{20}\right)^2};\ d_2 = \sqrt[5]{\frac{l}{z_2 - y}\left(\frac{Q}{20}\right)^2}.$$

Beispiel. Es sei für einen besonderen Fall $Q = 0^{cm},137$; $Q_1 = 0,103$ und $Q_2 = 0,034$, ferner sei $l = 300^m$, $l_1 = 200^m$ und $l_2 = 600^m$, so wie endlich $z_1 = 12^m$, $z_2 = 6^m$, wie berechnen sich hiernach die verschiedenen Röhrendurchmesser?

Auflösung. Für $v = 1^m$, folgt zunächst $d = 0^m 417$. Sodann aber

$$y = \frac{300}{(0,417)^5}\left(\frac{0,137}{20}\right)^2 = 0^m,887, \text{ worauf weiter folgt:}$$

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{200}{11,113}\left(\frac{0,103}{20}\right)^2} = 0^m,2377 \text{ und}$$

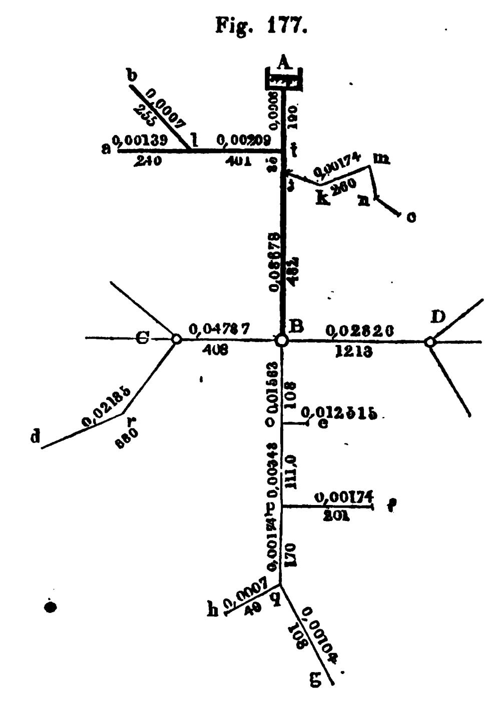
$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{600}{5,113}\left(\frac{0,034}{20}\right)^2} = 0^m,078.$$

§. 158.

Noch kürzer und für die Praxis in den meisten Fällen völlig ausreichend, zur Berechnung der Durchmesser eines Röhrensystemes, ist nachstehendes Verfahren, wozu wir, des werthvollen Vergleiches wegen, ein Beispiel d'Aubuisson's wählen, dabei unseren höchst einfachen Rechnungsgang den Haupttext bilden lassen, den umständlicheren des genannten Hydraulikers aber in correspondirenden Noten beifügen.

Beispiel. Aus dem Sammelbehälter A, Fig. 177, einer sogenannten Wasserkunst will man Wasser mittelst Röhren an verschiedene Punkte a, b, c, B,C,D etc. einer Stadt, und zwar in Summa pr. Sec. 0,060407 Cubikmeter (= 2,423 Cubikfuß hann.) *) schaffen; es fragt sich, wie man die Durchmesser der betreffenden Röhren zu nehmen hat, wenn die Wassermengen der einzelnen Stränge so verlangt werden, wie die nachstehende Tabelle und die Figur erkennen läßt u. wenn ferner die Längen der einzelnen Röhrenzweige (in der Fig. durch ganze Zahlen bemerkt), so wie d. Gefälle durch ein entsprechendes Nivellement, in nebenbemerkter Weise gegeben und ermittelt sind?

Fig. 177.



Auflösung. Zuerst werde bemerkt, daß wir (nach §. 156) die zu vertheilende Wassermenge um die Hälfte größer nehmen, also in die Rechnung das Quantum einführen: 0,060407 + 0,030203 = 0,09061 Cubikmeter pr. Secunde. Weitere Anhaltpunkte und Angaben folgen aus der Tabelle:

---

*) Nach Darcy (Fontaines Publiques, p. 530 und p. 556) beträgt die Quantität Wasser, welche jetzt pr. Kopf als täglicher Bedarf geliefert wird:

in London	90	Liter	in Bordeaux	170	Liter
„ Paris	84	„	„ Nantes	60	„
„ Brüssel	80	„	„ Besançon	246	„
„ Lyon	85	„	„ Dijon	240	„

1 Liter = 1,0288 hann. Quart. = 0,220 Gallon = 0,873 preuß. Quart. = 1,068 Dresd. Kannen.

Ausgußtiefe unter dem Wasserspiegel in A (Meter)		Auszugießende Wassermenge pr. Sec. (Cubikmeter)	Röhrenlängen (Meter)	Bemerkungen
a	8,10	0,00139	$\overline{AB} = 757$	Bei d soll eine Fontaine von $7^m,5$ Sprunghöhe angeordnet werden. Bei e eine andere ein Strahlenbouquet aus 7 Zweigen von $5^m,8$ über d. Stadtpflaster daselbst.
b	10,30	0,00070	$\overline{ia} = 641$	
c	16,80	0,00174	$\overline{lb} = 255$	
C	2,90	0,02604	$jc = 260$	
d	11,80	0,02185	$BC = 405$	
D	3,20	0,02326	$Cd = 680$	
e	8,30	0,01215	$BD = 1213$	
f	8,80	0,00174	$Bo = 108$	
g	9,80	0,00104	$op = 281$	
h	9,50	0,00070	$pf = 201$	
	Summe:	0,09061	$qg = 108$	
			$qh = 49$	

Die Krümmungswinkel der einzelnen Bogenstücke sind bei l: 130°, bei k: 140°, bei m: 110°, bei n: 75°, bei r: 90°, während die Krümmungshalbmesser überall $3^m,0$ betragen.

I. Durchmesser des Hauptstranges AB.

Mit Bezug auf die Formel des §. 151, nämlich $d = \sqrt[5]{\frac{l}{h}\left(\frac{Q}{20}\right)^2}$ ist hier $l = 757$, $h = 1,0$, $Q = 0,09061$, also $d = \sqrt[5]{\frac{757}{1}\left(\frac{0,09061}{20}\right)^2} =$ $0^m,4348$. *)

---

*) d'Aubuisson rechnet hier folgendermaßen.

Mit besonderer Beachtung der Versuche Couplet's setzt dieser Hydrauliker:

$$h_1 = 0,051 \,.\, v^2 + 0,00137 \,.\, \frac{l}{d}(v^2 + 0,055 \,.\, v),$$

so wie, wenn $v = \frac{4Q}{d^2\pi}$ gesetzt wird:

$$h_1 = 0,08264\,\frac{Q^2}{d4} + 0,002221\,\frac{l}{d^5}(Q^2 + 0,0432 \,.\, Q \,.\, d^2),$$

oder genau genug:

$$h_1 = 0,002221\left(\frac{Q^2}{d^5} + \frac{0,0432 \,.\, Q}{d^3}\right) . \, l.$$

Daher nach Setzung obiger Werthe:

$$h_1 = \frac{0,0138}{d^5} + \frac{0,00658}{d^3}.$$

II. Berechnung der Zweigröhre *ia*.

Um nicht Röhren von zu verschiedenem Durchmesser zu erhalten, wird man auf diese ganze Strecke eine Weite wählen, welche dem Theile *il* entspricht. Hierzu hat der Theil *Ai* des Hauptrohres ein Gefälle von $\frac{190}{757}$ $= 0^m,251$ und *a* liegt $8^m,1$ unter *A*, so daß als wirksame Druckhöhe verbleibt: $8,1 - 0,251 = 7^m,849$. Berechnet man hiernach mittelst der unter I. gebrauchten Formel einen Röhrendurchmesser und sodann die Geschwindigkeit, womit sich das Wasser in der Röhre bewegt, so ergiebt sich $v = 0^m,669$ und daher $\frac{v^2}{2g} = 0,02282$. Wegen der Abzweigung bei *A* und der Geschwindigkeitserzeugung ziehen wir nach §. 156 die dreifache Geschwindigkeitshöhe, das ist $3 . 0,02282 = 0,06846$ von 7,849 ab, so

Fig. 177.

Hierzu ist aber rechts noch der Verlust $= h_2$ an Druckhöhe zu fügen, welcher dadurch entsteht, daß, beim Herabsteigen der Hauptröhre von *A* in die Horizontale, ein Bogen mit zwei Anprallungswinkeln jeder von 22° 30′ gebildet wird, und weshalb nach I[a], §. 154, ist:

$$h_2 = 0,02 \frac{Q^2}{d^4} \Sigma (\sin \varphi^2) = \frac{0,0000481}{d^4}.$$

Sonach, weil $h_1 + h_2 = 1^m,0$ auch:

$$1 = \frac{0,0138}{d^5} + \frac{0,00658}{d^3} + \frac{0,0000481}{d^4}.$$

Eine erste Annäherungsrechnung liefert $d = 0^m,431$, woraus sodann, nach und nach, in bekannter Weise, endlich gefunden wird:

$$d = 0^m,432.$$

daß als Druckhöhe noch übrig bleibt: $7^m,78$. Da nun der Ausguß bei a durch einen kurzen cylindrischen Ansatz von $\delta = 0^m,04$ Durchmesser erfolgen soll (Ausflußcoefficient $\mu = 0,82$), so liefert die Gleichung:

$$d = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{7,78 - 0,082\frac{Q^2}{\mu^2\delta^4}}},\ d = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{7,78 - 0,208}} = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{641(0,00209)^2}{7,572}},$$

d. i. $d = 0^m,06212$. *)

III. Nebenzweig lb.

Es liegt bekanntlich b $10^m,30$ unter A. Hiervon ab das Gefälle von A bis i, d. i. $0^m,251$, bleiben übrig: $10^m,30 - 0^m,251 = 10^m,049$.

Ferner betrug das Gefälle von i bis a: 7,85 und daher von i bis l: $\frac{401}{641} \cdot 7,85 = 4^m,91$. Für die fragliche Strecke lb verbleiben sonach: $10,049 - 4,91 = 5^m,139$.

Der Ausguß bei l soll durch einen conisch convergenten Ansatz von $\delta = 0^m,021$ Mündungsdurchmesser (Ausflußcoefficient $= 0,90$) erfolgen, weshalb wir zuerst berechnen:

$$0,0820 \frac{Q^2}{\mu^2\delta^4} = 0,255$$

und daher erhalten:

$$d = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{lQ^2}{5,139 - 0,255}} = 0,3018 \sqrt[5]{\frac{255(0,0007)^2}{4,884}},$$

d. i. $d = 0^m,03644$. **)

*) d'Aubuisson berechnet
für Röhrenwiderstände eine Druckhöhe $= 0^m,2502$
wegen des Winkels bei l: $= 0^m,0014$ $\Big\} = 0^m,2516$.
Ferner
zur Erzeugung der Geschwindigkeit in der Röhre: $0^m,0195$,
„ „ „ Austrittsgeschwindigkeit: $0^m,0210$.
Veranschlagt den Verlust wegen der Vertheilung bei i zu:
$\frac{0,000000722}{d^4}$ und setzt endlich:

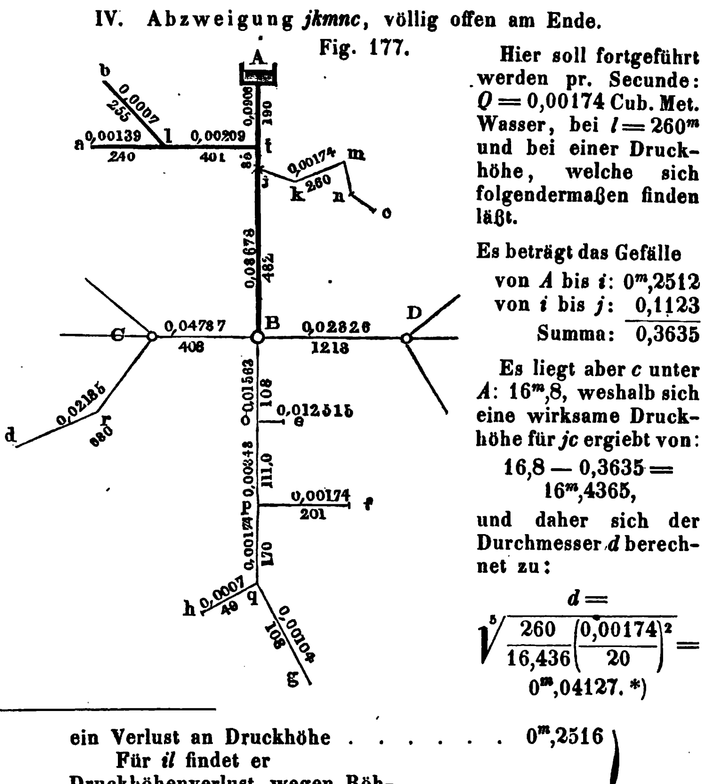
$$8,1 = 0,3516 + 0,0195 + \left(\frac{0,000006226}{d^5} + \frac{0,000128}{d^3}\right) + \frac{0,000000722}{d^4} + 0,021,$$

woraus er findet: $d = 0^m,0615$.

**) d'Aubuisson rechnet hier wie Nachstehend. Nach den Resultaten in der Note unter Nr. II ergiebt sich für die Strecke von A bis i

IV. Abzweigung *jkmnc*, völlig offen am Ende.

Fig. 177.



Hier soll fortgeführt werden pr. Secunde: $Q = 0{,}00174$ Cub. Met. Wasser, bei $l = 260^m$ und bei einer Druckhöhe, welche sich folgendermaßen finden läßt.

Es beträgt das Gefälle

von A bis i: $0^m{,}2512$
von i bis j: $0{,}1123$
Summa: $0{,}3635$

Es liegt aber c unter A: $16^m{,}8$, weshalb sich eine wirksame Druckhöhe für jc ergiebt von:

$$16{,}8 - 0{,}3635 = 16^m{,}4365,$$

und daher sich der Durchmesser d berechnet zu:

$$d = \sqrt[5]{\frac{260}{16{,}436}\left(\frac{0{,}00174}{20}\right)^2} = 0^m{,}04127. \;*)$$

ein Verlust an Druckhöhe . . . . . . $0^m{,}2516$
Für il findet er
Druckhöhenverlust wegen Röhrenwiderstände . . . . . $4^m{,}7670$
Druckhöhenverlust wegen Vertheilung . . . . $0{,}0503$ $= 4{,}8368$
Druckhöhenverlust wegen Richtungsveränderung . . . . $0{,}0195$
(zusammen mit obigem Verlust: $5^m{,}0884$)
Höhe zur Erzeug. der Geschwindigkeit in d. Nebenleitung $0{,}0251$
" " " " Ausflußgeschwindigkeit bei b . . $0{,}2572$
$5{,}3707$

Daher verbleiben von $10^m{,}3$ als wirksame Druckhöhe $10{,}30 - 5{,}3707 = 4^m{,}9293$, weshalb unter Berücksichtigung von Röhrenwiderstand und Vertheilung bei dem Zweige lb erhalten wird:

$$4{,}929 - \left(\frac{0{,}0000002788}{d^5} + \frac{0{,}000000081}{d^4} + \frac{0{,}0000171}{d^3}\right) = 0,$$

woraus aber folgt: $d = 0^m{,}0362$.

*) d'Aubuisson rechnet hier wegen Vertheilung und Geschwindigkeitserzeugung die dreifache der Geschwindigkeit v entsprechende

V. Hauptseitenstrang BC. Hier ist $l = 405^m$, $h = 1^m{,}9$ und $Q = 0^{c.m},04789$ und daher

$$d = \sqrt[5]{\frac{405}{1{,}9}\left(\frac{0{,}04789}{20}\right)^2} = 0^m{,}2614.\ *)$$

VI. Seitenzweig Crd: $l = 680^m$, $Q = 0^{c\,m},02185$. Das wirksame Gefälle berechnet sich folgendermaßen. Es liegt d unter A: $11^m{,}80$ und bei d soll sich ein Wasserstrahl $7^m{,}5$ über das Steinpflaster erheben, weshalb verbleiben $11{,}80 - 7{,}50 = 4^m{,}30$. Außerdem ist Gefälle von A bis B: 1^m und von B bis C: $1^m{,}9$, in Summa also $2^m{,}90$. Es ergiebt sich also überhaupt eine wirksame Druckhöhe von $4^m{,}30 - 2{,}90 = 1^m{,}40$. Da der Durchmesser des Mündungsstückes an der Sprungöffnung (bei d'Aubuisson) nicht weiter bezeichnet ist, alle übrigen passiven Widerstände ihrer Kleinheit wegen aber vernachlässigt werden können, so berechnet sich der Röhrendurchmesser für diese Strecke ohne Weiteres zu

$$d = \sqrt[5]{\frac{680}{1{,}4}\left(\frac{0{,}02185}{20}\right)^2} = 0^m{,}2252\ **)$$

VII. Hauptstrangtheil BD: $l = 1213^m$, $h = 2^m{,}2$ und $Q = 0{,}02326$. Hier berechnet sich ohne Weiteres der Röhrendurchmesser zu

$$d = \sqrt[5]{\frac{1213}{2{,}2}\left(\frac{0{,}02326}{20}\right)^2},$$

d. i. zu $d = 0^m{,}2369.$ ***)

Druckhöhe, d. i. $3 \times 0{,}0826\,\frac{Q^2}{d^4}$. Für Gesammtwiderstände von A bis j: $0^m{,}385$ und setzt dann:

$$16{,}42 - \left(\frac{0{,}000001748}{d^5} + \frac{0{,}0000434}{d^3} + \frac{0{,}000000751}{d^3} + \frac{0{,}0000000606\,.\,s^2}{d^4}\right) = 0,$$

wobei das vorletzte Glied der Parenthese den Widerstand wegen Vertheilung etc. bezeichnet, das letzte Glied aber den vorhandenen Reflexionswinkeln entspricht. Durch Vernachlässigung des letzten Gliedes berechnet d'Aubuisson zuerst: $d = 0^m{,}04078$. Mit Hülfe dieses Durchmessers findet er dann nach bekannter Methode (§. 154), daß die Strecke (wegen $\angle k = 140^0$), $\angle m = 110^0$ und $\angle n = 75^0$) 16 Reflexionswinkel jeden von $6^0 41'$ enthält und sonach $s^2 = \Sigma \sin\varphi^2 = 16\,.\sin(6^0 41')^2 = 0{,}2168$ ist, der Röhrendurchmesser aber sich durch weiteres Rechnen findet:

$$d = 0^m{,}04078.$$

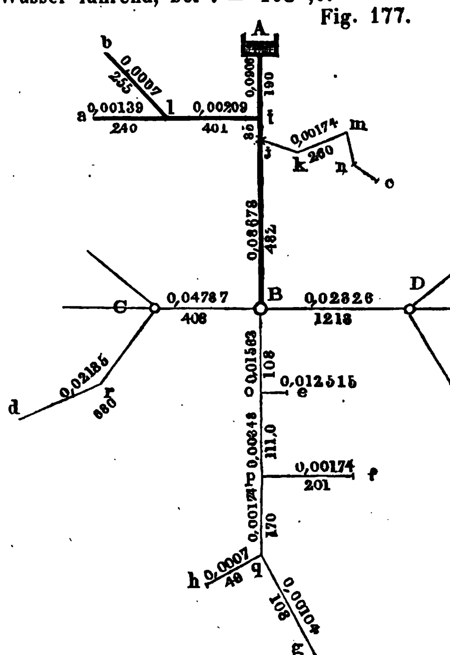
*) d'Aubuisson findet: $d = 0^m{,}260$.

**) d'Aubuisson berechnet: $d = 0^m{,}2250$.

***) Nach d'Aubuisson $d = 0^m{,}235$.

VIII. Hauptrohrtheil Bo, pr. Sec. $Q = 0{,}01563$ Cub. Meter Wasser führend, bei $l = 108^m{,}0$.

Fig. 177.



Da e bekanntlich $8^m{,}30$ unter A liegt und bei e eine Sprunghöhe von $5^m{,}8$ erwartet wird, so verbleiben zunächst: $8{,}30 - 5{,}80 = 2^m{,}50$. Hiervon sind jedoch noch abzuziehen das Gefälle von A bis B . . . . . $1^m{,}0$ die Geschwindigkeitshöhe in AB . . . $0^m{,}0195$ die Widerstandshöhe v. 7 Ausgüssen bei e, jeder v. 12^m Länge u. $0^m{,}04$ Durchmesser . . . $0^m{,}82$, weshalb die wirksame Druckhöhe folgt:

$$2{,}5-(1+0{,}0195+0{,}82 = 0^m{,}66$$

und der Durchmesser der Röhre Bo sich berechnet zu:

$$d = \sqrt[5]{\frac{108}{0{,}66}\left(\frac{0{,}01563}{20}\right)^2} = 0^m{,}1584.\ ^{*)}$$

IX. Hauptrohrtheil op. Da diese Strecke ein Gefälle von $2^m{,}14$ besitzt, die Röhrenlänge $111^m{,}0$ und die pr. Secunde fortzuschaffende Wassermenge $0{,}00348^{c.m}$ beträgt, so ergiebt sich:

$$d = \sqrt{\frac{111}{2{,}14}\left(\frac{0{,}00348}{20}\right)^2} = 0^m{,}06906.\ ^{**)}$$

Letzterer Durchmesser wird zugleich bis q beibehalten.

X. Zweigrohr pf von 201^m Länge. Bei f erfolgt der Ausguß der Wassermenge, $Q = 0{,}00174$ pr. Sec., durch einen conisch convergenten Ansatz von $\delta = 0^m{,}02$ Mündungsdurchmesser ($\mu = 0{,}90$). Die wirksame Druckhöhe berechnet sich leicht also:

Gefälle von A bis B:	$1^m{,}00$		Da nun f $8^m{,}8$ unter A liegt, so ergiebt sich $h = 8{,}8 - 3{,}8 = 5{,}0$.
„ „ B „ o:	0,66		
„ „ o „ p:	2,14		
	$3^m{,}80$		

*) Nach d'Aubuisson: $d = 0^m{,}1564$.
**) d'Aubuisson findet: $0^m{,}0683$.

Daher

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{201\,.\,(0{,}00174)^2}{5 - \frac{(0{,}00174)^2}{(0{,}09)^2.(0{,}02)^4}}} = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{201\,.\,(0{,}00174)^2}{3{,}071}},$$

d. i. $d = 0{,}05484$. 1)

XI. Zweigrohr qg. Hier ist $Q = 0{,}00104^{c.m}$, $l = 108^m$. Der Ausguß erfolgt durch ein conisch convergentes Ansatzrohr von $0^m{,}015$ Mündungsdurchmesser ($\mu = 0{,}9$). Das Gefälle von A bis q beträgt $4^m{,}68$, während g um $9^m{,}8$ unter A liegt, folglich wirksam bleiben: $9{,}8 - 4{,}68 = 5^m{,}12$. Es berechnet sich folglich, da $0{,}0820 \frac{Q^2}{\mu^2\delta^4} = 2{,}179$ ist:

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{108(0{,}00104)^2}{5{,}12 - 2{,}179}} = 0^m{,}03953.\ ^{2)}$$

XII. Zweigrohr qh. Der Ausguß von $Q = 0^{c.m}{,}0007$ pr. Secunde erfolgt bei h durch eine dünne Platte von $0^m{,}014$ Durchmesser ($\mu = 0{,}62$), ferner ist $l = 49^m{,}0$ und es liegt h unter A: $9^m{,}50$, weshalb (nach XI) die wirksame Druckhöhe $9{,}50 - 4{,}68 = 4^m{,}82$ ist. Da sich nun berechnet: $0{,}0820 \frac{Q^2}{\mu^2\delta^4} = 2{,}715$, so findet sich:

$$d = 0{,}3018 \sqrt[5]{\frac{49.(0{,}0007)^2}{4{,}82 - 2{,}715}} = 0^m{,}03091.\ ^{3)}$$

Anmerkung 1. Für den Zweck der praktischen Ausführung wird man die Durchmesser der Leitung vorstehenden Beispieles vielleicht am besten nehmen: $0^m{,}45$, $0^m{,}30$, $0^m{,}15$, $0^m{,}08$ und $0^m{,}05$.

d'Aubuisson wandte für öffentliche Zwecke nie engere (gußeiserne) Röhren als solche von $0^m{,}05$ Durchmesser an. Anderweitige hier nicht unpassend aufzuführende Datas sind Folgende:

Wasserleitung in Paris. 4)

(Länge der einzelnen Röhre: $2^m{,}61$.)

Röhrendurchmesser	$0^m{,}60$	$0^m{,}50$	$0^m{,}40$	$0^m{,}35$	$0^m{,}325$	$0^m{,}300$	$0^m{,}25$	$0^m{,}216$	$0^m{,}19$	0,162	0,135	0,108	0,081
Krümmungshalbmesser	Ueberall: $1^m{,}5$							$1^m{,}00$		$0^m{,}75$		$0^m{,}50$	$0^m{,}45$

1) Nach d'Aubuisson: $d = 0^m{,}0544$.
2) d'Aubuisson berechnet: $d = 0^m{,}0392$.
3) d'Aubuisson findet: $d = 0^m{,}0306$.
4) Dupuit: Distribution des eaux etc., p. 227.

Wasserleitung in Dijon.[1]								
	Röhrenlänge: $2^m,51$					Röhrenlänge: $2^m,01$		
Röhrendurchmesser	$0^m,35$	$0^m,216$	0,190	0,162	0,135	0,108	0,081	0,060
Krümmungs-halbmesser	$1^m,5$	$1^m,0$	0,75	0,75	0,75	$0^m,50$	0,50	0,50

Wasserleitung in Hamburg.[2]

Länge 9′ engl. Krümmungshalbmesser 15′ bis 30′ { Hauptröhren 20 Zoll Durchm. (engl. Maß) / Hauptzweige 18″, 16″, 14″ und 12″ / Nebenzweige 10″, 9″, 6″ und 4″ } Gußeisen

Hausröhren 1 zöllig und $\frac{3}{4}$ zöllig } Blei.

Wasserleitung in Hannover.[3]

Hauptröhren 6″ und $4\frac{1}{2}$″ Durchm. Die Länge der einzelnen Röhren 9′.
Nebenzweige (öffentliche Wasserpfosten) 3″ weit und 6′ lang.
„ (private „) 3″ und 2″ weit.

Anmerkung 2. Nach Dupuit[4]) berechnet man zur Zeit die Wandstärke $= e$ der pariser gußeisernen Wasserleitungsröhren nach der Formel:

$$e = 0{,}008 + 0{,}00016 \,.\, D \,.\, H,$$

wo D und H (in Metern) Durchmesser und Druckhöhe (wie Seite 36) bezeichnen.

Im Falle der plötzlichen Absperrungen des Wassers (wo der Eintritt von Stößen, die Wirkung des sogenannten hydraulischen Widders zu fürchten ist) räth Dupuit, die Berechnung nach der Formel vorzunehmen:

$$\text{I.}\quad e = 0{,}008 + 0{,}00016 \,.\, D \,.\, H + 0{,}0128 \,.\, D \text{ (Meter)}.$$

Eine andere Formel, jedoch von denselben Principien ausgehend, entwickelt Wiebe[5]), nämlich:

$$\text{II.}\quad e = \frac{D}{2}\left\{-1 + 0{,}41\sqrt{[5{,}50 + \sqrt{(v^2 + 0{,}17)}]}\right\} + 0{,}87 \text{ Centimet.}$$

(wobei jedoch v in Metern und D in Centimetern zu substituiren ist).

Für den Fall, daß $D = 0^m,16$, $H = 4 \,.\, 10 = 40$ (4 Atmosph.) und $v = 1^m$ ist, liefert

I. die Wanddicke $e = 0{,}011072$ Meter $= 11{,}072$ Millimeter,
II. „ „ $e = 1{,}283$ Centimeter $= 12{,}83$ Millimeter.

1) Darcy: Font. Publ. p. 314.
2) Fölsch: Hamburger Stadtwasserkunst, 1851.
3) Hannoversches Polizeiblatt, Bd. 7, Stück 12 (12. Febr. 1853), S. 115.
4) Distribution des eaux etc., p. 119.
5) Lehre von den einfachen Maschinen. Bd. 1, S. 356.

Drittes Kapitel.

Springende Wasserstrahlen.

§. 159.

Die Geschwindigkeit v, womit sich Wasser in einer Röhrenleitung von l Länge, d Durchmesser und Ω Querschnitt bewegt, deren Ausflußöffnung durch eine Mündung ω verengt wird, ist nach §. 154, Seite 408:

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \eta \frac{l}{d} + \Sigma\eta_n}},$$

wobei $\Sigma\eta_n$ die Summe der Widerstandscoefficienten bezeichnet, welche den vorhandenen Querschnitts- und Richtungsveränderungen der Röhre entsprechen.

Ferner ist die Geschwindigkeit c, womit das Wasser aus der Mündung ω tritt:

$$\text{II.} \quad c = v \frac{\Omega}{\mu\omega}.$$

Giebt man daher der Mündung ω eine solche Lage, daß das Wasser in verticaler Richtung, aufwärts, aus derselben tritt, so müßte sich der hervortretende Strahl zu einer Höhe Z erheben, welche durch die Gleichung ausgedrückt wird:

$$\text{III.} \quad Z = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2.$$

Diese Höhe wird indeß nicht erreicht, weil Luftwiderstand und zurückfallende Wassertheilchen dem Aufsteigen neue Widerstände bereiten, die im Vorstehenden nicht berücksichtigt worden sind.

Zur Zeit fehlt es noch an einem für alle Fälle brauchbaren mathematischen Ausdruck, um die wirkliche Steighöhe S eines Wasserstrahles aus der theoretischen Sprunghöhe Z berechnen zu können. Höchst wahrscheinlich ist es jedoch, daß diese Steighöhe im quadratischen Verhältnisse der Geschwindigkeitshöhe Z abnimmt und im geraden Verhältnisse des einfachen Strahlendurchmessers wächst.

Anmerkung 1. Bemerkenswerthe Versuche über den Einfluß des Luftwiderstandes auf die Höhe springender Strahlen haben zur Zeit nur Mariotte *), Bossut **) und Baumgarten ***) angestellt.

*) Oeuvres de M. Mariotte, T. II à Leyde, 1717. Deutsch v. Meining (Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik). 4. Theil. S. 331 etc. Leipzig 1723.

**) Traité d'hydrodynamique, T. II; p. 104.

***) Darcy: Fontaines publiques, p. 436.

Die wichtigsten Resultate der Versuche Mariotte's sind Folgende:

Die Ausflußöffnung der vertical aufwärts springenden Strahlen war in dünner Wand der horizontal gelegten Mündung eines nach oben gekehrten Röhrenendes angebracht.

	Durchmesser der Mündung					Durchm. d. Münd.	
	6 pariser Linien					3‴	4‴
Druckhöhe	5′6″	12′4″	24′ 5″	26′ 1″	34′11½″	34′11½″	34′11½″
Strahlhöhe	5′3″11‴	12′0″	22′10″	24′2½″	31′ 8½″	28′ 0″	30′ 0″

Aus diesen Versuchen schloß Mariotte (S. 328 a. a. O.), daß zu einer Strahlhöhe von $5 . n$ Fußen, allemal eine Druckhöhe von $5n + \frac{1}{12} n^2$ Fußen gehöre. Setzt man daher die Strahlhöhe $5n = S$ und die Druckhöhe $= Z$, so erhält man:

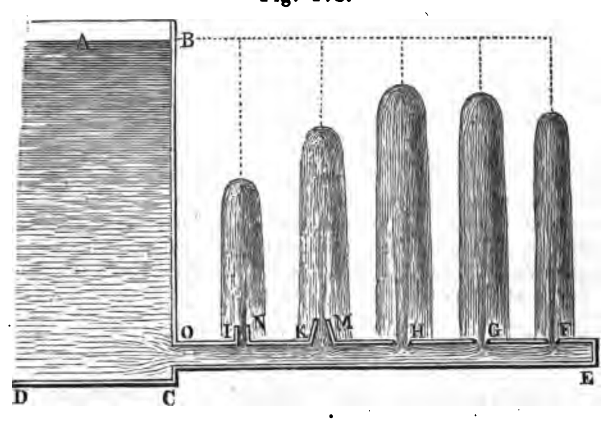
$$Z = S + \frac{1}{12} \frac{S^2}{25}$$

$$Z = S + \frac{S^2}{300} \text{ *) (Pariser Fuß), oder}$$

$$S = -150 + \sqrt{300 . Z + 22500}.$$

Bei Aufstellung dieser Regeln hat Mariotte weder auf die Gestalt noch Größe der Sprungmündung noch auf die Länge der Leitung Rücksicht genommen, in welcher die Ausflußöffnung angebracht war.

Fig. 178.



*) $Z = S + \frac{S^2}{269}$ hannov. Fuß.

Von den Versuchen Bossut's verdienen Nachstehende besondere Erwähnung.

Bei einer constanten Druckhöhe $OB = 11$ Fuß, Fig. 178, über der oberen Wand *OF* im Gefäße *ABCD* von 9 Quadratfuß Querschnitt, wobei die Röhre *OE* eine Weite von 3 Zoll 8 Linien hatte, erhoben sich die Strahlen auf folgende Höhen:

Etwas geneigter Strahl	Verticaler Strahl	Mündung in dünner Wand
10′ 4″ 6‴	10′ 0″ 10‴	*F*: 2 Lin. Durchmesser
10′ 7″ 6‴	10′ 5″ 10‴	*G*: 4 „ „
10′ 8″ 0‴	10′ 6″ 6‴	*H*: 8 „ „
9′ 8″ 6‴	9′ 6″ 4‴	Kegelmündung *KM* von 70‴ Höhe, 9‴ untern und 4‴ obern Durchmesser.
7′ 3″ 6‴	7′ 1′ 6‴	Cylindrischer Ansatz *JN* von 70‴ Höhe und 4‴ Durchmesser.

Bei der verhältnißmäßig geringen Länge (6 Fuß) der Röhre *OE*, konnte der Einfluß des Röhrenwiderstandes vernachlässigt und überhaupt geschlossen werden, daß auch hier die Sätze des §. 101 Bestätigung fanden, die Steighöhe, unter sonst gleichen Umständen, für eine Oeffnung in dünner Wand am größten, für den cylindrischen Ansatz am kleinsten war, ferner auch (wie bei Mariotte) die Steighöhe mit der Strahldicke zunahm.

d'Aubuisson *) hat aus 6 Versuchen Mariotte's und aus einem Versuche Bossut's für die Berechnung der Strahlhöhe S aus der Druckhöhe $= Z$ an der Mündung die Formel abgeleitet:

$$\left.\begin{array}{l} S = Z - 0{,}01 \,.\, Z^2 \quad \text{oder} \\ Z = 50 + \sqrt{2500 - 100\,S} \end{array}\right\} \text{(Metermaß).}$$

Hiervon wird letzterer Werth schon imaginär, wenn die Strahlhöhe 25 Meter übersteigt. Welches Vertrauen hiernach diese Formeln verdienen, versteht sich von selbst.

Weisbach **) hat, unter Voraussetzung, daß die Luft dem aufsteigenden Wasserstrahle eben so entgegen wirkt, wie die Fläche einer Leitungsröhre, für die Steighöhe S, mit Beachtung der Mariotte-schen Versuche, den Ausdruck abgeleitet:

$$S = Z\left(1 - 0{,}000054 \,.\, \frac{Z}{\delta}\right),$$

wobei δ den Durchmesser der Strahlmündung bezeichnet. Welche Werthe man hiernach für die Höhen der Strahlen bei verschiedenen

*) Traité d'hydraulique, pag. 274.

**) Ing. Mechanik, 3. Auflage, Bd. 1, Seite 758.

Z und δ erhält, ergiebt sich aus der berechneten Tabelle der folgenden Anmerkung.

Baumgarten *) hat für Strahlen von $0^m,05$ Durchmesser eine Reihe von Versuchen angestellt, deren Endresultat dahin geht, daß man bei bemerkten Strahldicken die Druckhöhe über der Sprungmündung nur mit 0,95 zu multipliciren habe, um die Strahlhöhe zu erhalten; daß man jedoch bei Strahlen von $0^m,0135$ Dicke (wie bei den von d'Aubuisson benutzten Versuchen) diesen Multiplicator etwas vermindern und 0,93 nehmen müsse.

Anmerkung 2. Zur noch besseren Beurtheilung der vorstehenden Formeln und des ganzen Gegenstandes überhaupt, sind im Nachstehenden die Rechnungsresultate eines bestimmten Falles zusammengestellt, wobei namentlich der Einfluß der Durchmesser $= \delta$ der Sprungöffnungen recht in's Auge fällt.

Angenommen ist dabei eine Totaldruckhöhe $h = 150$ Fuß hann., Länge $= l$ der Leitungsröhre vom Sammelbehälter bis zur Sprungöffnung 2000 Fuß, Röhrendurchmesser $= d = 12$ Zoll $= 1$ Fuß, Ausflußcoefficient (wie bei der Herrenhausen-Strahlmündung, Fig. 179) $\mu = 0,96$, Erdacceleration $g = 33,6$ Fuß. Hiernach wird aus I, §. 159, wenn man $\Sigma\eta_n$ als klein genug vernachlässigt:

$$v = \frac{100,4}{\sqrt{\frac{22499}{\delta^4} + 2000 . \eta}},$$

ferner

$$c = \frac{d^2}{\mu . \delta^2} . v,$$

so wie

$$Z = \frac{c^2}{2g},$$

und endlich, wenn man, zum Vergleiche, den Weisbach'schen Ausdruck (voriger Anmerkung) für die Steighöhe $= S$ benutzt:

$$S = \left(1 - 0,000054 . \frac{Z}{\delta}\right) Z.$$

Hierzu wurden überdies in der Tabelle die pr. Secunde ausströmenden Wassermengen

$$Q = \frac{d^2\pi}{4} . v = 0,785 . v$$

gefügt.

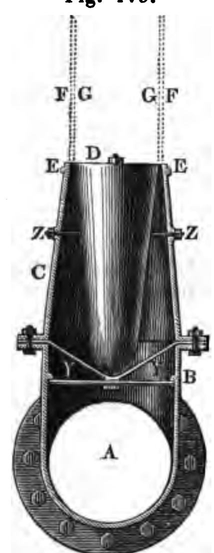
---

*) Darcy: Fontaines publiques, p. 436.

δ	η	v	c	Z	S	Q
Zoll		Fuß	Fuß	Fuß	Fuß	Cubikfuß
12	0,02	15,66	15,66	3,958	3,957	12,393
11	0,02	15,57	19,31	5,549	5,547	12,222
10	0,02	15,44	23,17	7,987	7,982	12,120
9	0,02	15,23	28,17	11,88	11,869	11,965
8	0,02	14,89	34,84	18,06	18,033	11,690
7	0,02	14,30	43,76	28,49	28,414	11,230
6	0,02	13,25	57,90	49,88	49,61	10,400
5	0,02	11,25	70,20	73,52	73,02	8,84
4	0,02	8,80	85,80	109,50	107,55	6,91
2,85 *)	0,0209	5,14	94,94	134,12	130,02	4,03
2	0,03	2,621	98,29	143,81	137,108	2,057
1	0,05	0,668	100,20	149,32	134,87	0,524
$\frac{1}{2}$	0,07	0,167	100,38	149,94	120,80	0,1313

Am Meisten auffallend erscheint hier, gegenüber der Druckhöhe $h = 150$ Fuß, die Größe der Sprunghöhe $Z = 3,958$ der ersten Horizontalcolumne, wo die Ausflußöffnung durch keinen Ansatz verengt ist, sondern mit der Leitröhre gleiche Weite ($d = \delta$) hat.

Fig. 179.



Anmerkung 3. Bei hohlen Strahlen, wie z. B. an der großen Fontaine zu Herrenhausen, sind alle vorbemerkten Regeln zur Bestimmung von S aus Z unbrauchbar, wie sich der Verfasser durch in Herrenhausen angestellte Versuche überzeugte.

Um betreffende Mittheilungen hierüber zu machen, zeigen die Figuren 179 bis mit 181 die Sprungöffnung des Herrenhausener großen Strahles, wobei A das 16 Zoll (hannov.) weite Zufuhrrohr und B ein cylindrischer Aufsatz ist, auf welchen man den Hohlkegel CE geschraubt hat. Im Innern des Hohlkegels befindet sich in umgekehrter Lage ein zweiter massiver Kegel D, welcher auf Stegen Y ruht und durch die Schrauben Z justirt werden kann.

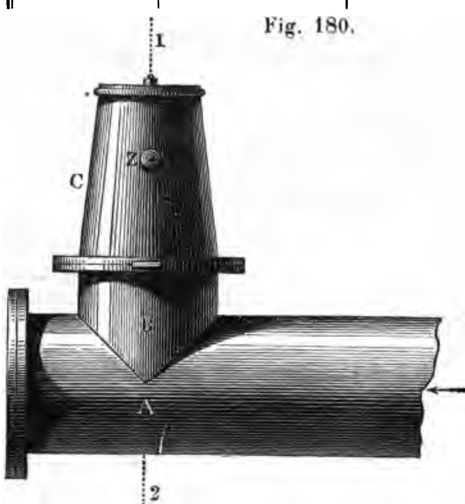
Der äußere Durchmesser EE der Mündung mißt 11 Zoll (hannov.), der innere $10\frac{5}{8}$ Zoll, so daß die Breite (Dicke) des ringförmigen Raumes FG nur $\frac{3}{16}$ Zoll beträgt.

Sorgfältige, vom Verfasser bei ruhigem Wetter angestellte Versuche und gleichzeitige Messungen der Strahlhöhe lieferten folgende Resultate:

*) Durchmesser eines Kreises, dessen Inhalt dem Mündungs-Querschnitte des Herrenhauser Strahles entspricht.

Druck in Atmosph. nahe der Mündung (über den äußern Luftdruck)	Druckhöhe an der Mündung $= Z$ in Fußen	Sprunghöhe $= S$ in Fußen	$\frac{S}{Z}$
$3\frac{1}{2}$	123,65	102,75	0,83
$3\frac{1}{4}$	114,90	99,40	0,86

Fig. 180.



Die Werthe der ersten Verticalreihe wurden mit Hülfe sogenannter Etalon-Manometer von Bourdon in Paris, die man so nahe wie möglich an der Sprungöffnung anbrachte, ermittelt.

Da zur Zeit der Versuche, eines Umbaues wegen, es wünschenswerth wurde, die Wassermenge des Strahles möglichst genau zu kennen (wenigstens genauer, als dies durch die Dimensionen und Hubzahlen der vorhandenen 40 Pumpen an der sogenannten Wasserkunst möglich war), so wurde der betreffende Ausflußcoefficient μ ermitttelt und zu $\mu = 0{,}96$ gefunden. *)

Fig. 181.

*) Man bediente sich hierzu eines Ausflußapparates nach Hrn. Bergrath Weisbach, welchen derselbe für die hiesige polytechnische Schule anfertigen zu lassen die Güte gehabt hatte. Dabei war der Formel II., §. 77, nämlich

$$\mu = \frac{2A(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{a.t.\sqrt{2g}}$$ entsprechend:

$A = 80089^{\square mm}$, $a = 18^{\square mm},064$, $h = 811^{mm}$, $h_1 = 697^{mm}$, $\sqrt{2g} = 140^{mm},06$, $\sqrt{h} - \sqrt{h_1} = 2{,}076$, und daher $\mu = \frac{131{,}41}{t}$, wonach folgende kleine Tabelle berechnet wurde:

t	135 Sec.	137	137	138	137
μ	0,973	0,959	0,959	0,952	0,959

Die betreffende Rechnung geschah mittelst zwei verschiedener Formeln. Einmal wählte man nach V., §. 154:

$$Q = 20\sqrt{\frac{hd^5}{l + 33\frac{d^5}{\mu^2\delta^4}}}$$

und fand, da $h = 3{,}5 \times 10{,}336 = 36^m{,}176$
$l = 25^m{,}5$
$d = 0^m{,}4632$ (berechnet, da zwei Röhren von je $0^m{,}292$ Durchmesser das Wasser zuführte)
$\delta = 0{,}06928$

$$Q = 20\sqrt{\frac{36{,}176 . (0{,}4632)^5}{33167{,}8}} = 0{,}09645 \text{ Cub. Meter, oder}$$

$$Q = 3{,}87 \text{ Cubikfuß hannov.}$$

Ein zweites Mal rechnete man mit Zuziehung der Prony'schen Formel, §.   , unter Einführung der von Weisbach berechneten Coefficienten, und beachtete dabei die Richtungsveränderung (neunzig Grad) nahe der Mündung bei AB, Fig. 180, setzte, wenn c die Mündungsgeschwindigkeit bezeichnet:

$$\frac{M}{2}\left(\frac{c^2}{\mu^2} - v^2\right) + \tfrac{1}{2} Mv^2 = gMh - \frac{Mlp}{\alpha}(\alpha v + \beta v^2)$$

$$\frac{c^2}{\mu^2 . 2g} = h - \frac{l}{d}(Av + Bv^2) \text{ oder wegen } c = \frac{2vd^2}{\mu\delta^2} \text{*)}$$

$$\frac{4v^2d^4}{\mu^4 . 2g . \delta^4} = h - \frac{l}{d}(Av + Bv^2), \text{ d. i.}$$

$$\frac{4d^4}{\mu^4 . 2g\delta^4} . v^2 = h - \frac{l}{d}(0{,}00022915 . v - 0{,}00092627 . v^2) \text{ Metermaß.}$$

Da nun: $h = 3\frac{1}{2} \times 10{,}336 = 36^m{,}176$, $l = 25{,}50$, $\mu = \psi = 0{,}96$, $d = 0{,}292$ und $\delta = 0{,}06928$, $2g = 19^m{,}617$ ist, so folgt:

$$75{,}75 . v^2 = 36{,}176 - 87{,}32\,(0{,}00022915 . v + 0{,}00092627 . v^2)$$

$$75{,}75 . v^2 = 36{,}176 - 0{,}02 . v - 0{,}081 . v^2$$

$$v^2 + 0{,}000264 . v = 0{,}477$$

$$v = 0^m{,}69 = 2{,}363 \text{ Fuß hannov.}$$

Daher die Wassermenge $= Q$ pr. Secunde:

$$Q = 2 . \frac{d^2\pi}{4} . v = 2 . 0{,}785 . 2{,}363 = 3{,}71 \text{ Cubikfuß hannov.}$$

*) d bezeichnet hier den Durchmesser ($= 0^m{,}292$) einer der beiden Leitungsröhren.

Letzterer Werth wird als der wahrscheinlich richtigste für das fragliche Wasserquantum zu betrachten sein. (Man sehe auch §. 155.)

Schließlich noch folgende nicht unwichtige Bemerkung. Auch bei der Herrenhausener großen Fontaine hat man es als einen Uebelstand bemerkt, daß hohle Strahlen, wegen des sich im Innern bildenden luftverdünnten Raumes, unangenehme Zusammenziehungen und Störungen der Bewegung hervorbringen. Diesem Uebel wird man jedoch anders abzuhelfen suchen, wie dies bei dem berühmten Casseler Strahle und bei der Sanssouci-Fontaine*) bei Potsdam geschehen ist. Die Mündung des Strahles der Casseler Haupt-Fontaine ist im Grundriß, Fig. 182, abgebildet und hat dabei die Mündung des mittleren vollen Strahles $ab = 1\frac{11}{16}$ Zoll (preuß.) Durchmesser, während jede der zwölf Seitenstrahlen $\frac{7}{8}$ Zoll Durchmesser besitzt.

Fig. 182.

§. 160.

Geneigte Strahlen.

Zur Beurtheilung gegen den Horizont geneigter Strahlen kann man, unter der Voraussetzung, daß die Bahn sowohl für den aufsteigenden, wie absteigenden Ast eine gemeine Parabel ist**), von den Sätzen über Wurfbewegung im luftleeren Raume (§. 15 Geodynamik) eine nützliche Anwendung machen.

Bezeichnet daher c die Anfangsgeschwindigkeit und α den Neigungswinkel des Axenwasserfadens gegen den Horizont, so erhält man als Beziehung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y:

$$y = x \,.\, tg\,\alpha - \frac{g \,.\, x^2}{2 \,.\, c^2 \,.\, \cos\alpha^2}, \text{ oder}$$

wenn man $c = \psi\sqrt{2gS}$, also $\frac{g}{c^2} = \frac{1}{2 \,.\, \psi^2 \,.\, S}$ einführt:

$$(1) \quad y = x \,.\, tg\,\alpha - \frac{x^2}{4\psi^2 \,.\, S \,.\, \cos\alpha^2}.$$

Für die Culminationshöhe $= e$ erhält man daher

$$(2) \quad e = \frac{c^2 \,.\, \sin\alpha^2}{2g} = \psi^2 \,.\, S \sin\alpha^2,$$

*) Der Fontainenbau in Sanssouci. Erbkam, Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. 1852 (Jahrg. II), Seite 372 und Seite 460.

**) Bei den hier vorkommenden geringen Anfangsgeschwindigkeiten ist diese Voraussetzung, für den fraglichen Zweck, als genau zutreffend für den aufsteigenden Ast und als hinlänglich annähernd für den absteigenden Ast zu betrachten.

so wie für die Sprungweite $= w$:

$$(3) \quad w = \frac{c^2 . \sin 2\alpha}{g} = 4 . \psi^2 . S \sin \alpha \cos \alpha.$$

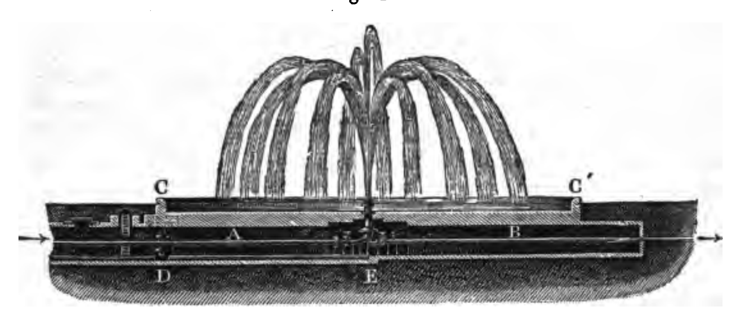
Endlich folgt aus der Division von (3) in (2):

$$(4) \quad \frac{e}{w} = \tfrac{1}{4}\, tg\, \alpha.$$

In praktischen Fällen erhält man in der Regel ein gewisses Wasserquantum, was unter gegebenem Drucke auf vorgeschriebene Höhe und Weite getrieben werden soll und wozu Neigungswinkel, Art und Durchmesser der Mündung zu bestimmen sind, wozu aber auch vorstehende Formeln völlig ausreichen.

Anmerkung. Eine Aufgabe letzterer Art ist in folgendem Beispiele gelöst, worauf sich auch unsere Figuren, Fig. 183 bis mit 186, beziehen, welche die Fontainen-Anlage auf dem Petersplatze zu Dijon

Fig. 183.



darstellen.*) Das Bassin *CC* hat dabei 27 Meter Durchmesser und $0^m,7$ Tiefe, der Röhrenstrang *A*, welcher das Speisewasser zuführt, ist $0^m,19$ weit und verzweigt sich über *E* in drei Aeste, wovon der eine den im Rohre *m* aufsteigenden Mittelstrahl *aa*, Fig. 184, speist, der andere im Rohre *n* das Wasser zu den größeren und kleineren Seitenstrahlen liefert und dabei den ringförmigen Raum *p* füllt, eine Anordnung, wodurch der Centralstrahl von den Seitenstrahlen ganz unabhängig wird. Ein drittes Rohr *B* kann die Wässer zu anderen Zwecken weiter führen, wenn die Strahlen bei *E* nicht springen, so wie ferner über *D* ein Abfallrohr für das Bassin *C* angeordnet ist, und endlich links von *E* sich Stellschieber vorfinden, um das auszuwerfende Wasserquantum und den Effect der Strahlen verändern zu können.

Der Mittelstrahl ist in dünner Wand angebracht, für die Seitenstrahlen sind dagegen conisch convergente Ansätze, Fig. 183, vorhanden, welche in Oeffnungen *b*, *b* und *c*, *c* der gekrümmten Decke *kk*, Fig. 184, geschraubt werden können.

*) Darcy: Fontaines publiques, Planche 19.

Fig. 184.

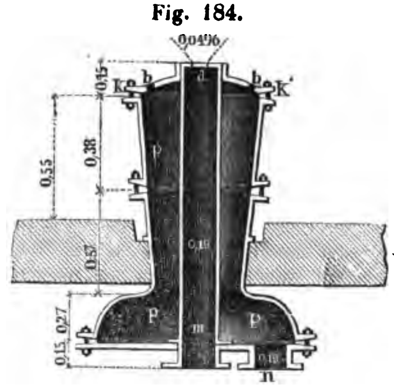


Fig. 185.

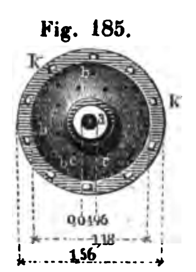
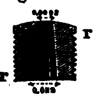


Fig. 186.



Beispiel. Es ist die Anordnung zu einer Fontainen-Anlage, wie Fig. 183—186, unter folgenden gegebenen Bedingungen zu treffen. Nach Abzug aller passiven Widerstände steht unmittelbar vor der Mündung eine Druckhöhe von 11 Meter zu Gebote, während die zur Disposition stehende Wassermenge von 0,017742 Cub. Meter pr. Secunde in folgender Weise vertheilt werden soll.

Für den Mittelstrahl *aa* den zehnten Theil . . .	$0^{c.m},0017742$
„ 8 Seitenstrahlen *bb* des ersten Ranges die Hälfte	0,0088710
„ 8 Seitenstrahlen *cc* des zweiten Ranges vier Zehntheile	0,0070968
	0,0177420

Ferner ist vorgeschrieben, daß sich die Seitenstrahlen des ersten Ranges auf 9 Meter Höhe erheben und $8^m,5$ Sprungweite annehmen, die des zweiten Ranges aber auf 8 Meter Höhe und $9^m,5$ Sprungweite erstrecken.

Auflösung. Für den Durchmesser d des Mittelstrahles in der dünnen Wand (Ausflußcoefficient $\mu = 0,62$), erhält man ohne Weiteres, wenn $0,0017742 = q$ und $11,0 = h$ gesetzt wird:

$$d = \sqrt{\frac{4.q}{\mu.\pi.\sqrt{2gh}}}, \text{ d. i.}$$

$$d = \sqrt{\frac{0,0017742}{0,62.0,785.4,42\sqrt{11}}} = 0^m,0157.$$

Im Falle, daß alles Wasser durch den Mittelstrahl ausgegossen werden soll, hat man hiernach der Mündung einen Durchmesser von $d\sqrt{10} = 0,0157.\sqrt{10} = 0^m,0496$ zu geben.

Die Richtung der Mundstückaxe für die Seitenstrahlen ersten Ranges *bb*, erhält man, nach (4) der vorstehenden Formeln zu $\alpha = 76^0 43'$, indem

$$tg.\alpha = \frac{4.e}{w} = \frac{4.9,0}{8,5} = tg.76^0 43' \text{ ist.}$$

Hiernach berechnet sich aus (2) der Geschwindigkeitscoefficienten ψ zu

$$\psi = \sqrt{\frac{e}{S.\sin.\alpha^2}}, \text{ d. i.}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{9}{11.(0,9732)^2}} = 0,9294.$$

Hierzu gehört, nach Seite 239, der Convergenzwinkel des conisch convergenten Ansatzes 5° 26′ und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,930$, daher sich der Durchmesser d_1 einer der Mündungen berechnet, wegen

$$d_1 = \sqrt{\frac{q_1}{\mu . 0,785 . 4,42\sqrt{h_1}}} = \sqrt{\frac{q_1}{11,508.\mu}}, \text{ d. i. zu}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{0,001109}{11,508.0,930}},$$

$$d_1 = 0^m,009816.$$

Als Länge der Ansätze wird man $0^m,03$ annehmen können.

Für die Seitenstrahlen zweiten Ranges ist:

$$tg.\alpha = \frac{4.8}{9,5} = tg\, 73^\circ 28', \text{ daher}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{e}{S.\sin.\alpha^2}} = \sqrt{\frac{8}{11.(\sin 73^\circ 28')^2}} = 0,889.$$

Letzterer Werth entspricht (genau genug) einem Convergenzwinkel von 3° 10′ und einem Ausflußcoefficienten $\mu = 0,895$, daher erhält man für einen der Durchmesser d_2 der 8 kleineren Seitenstrahlen, weil hier $q_2 = \frac{0,0070968}{8} = 0,0008871$ ist,

$$d_2 = \sqrt{\frac{q_2}{11,508.\mu}} = \sqrt{\frac{0,0008871}{11,508.0,895}}, \text{ d. i.}$$

$$d_2 = 0^m,00928.$$

Vierter Abschnitt.

Kraft bewegten Wassers und Widerstand, welchen feste Körper erfahren, die in ruhendem Wasser bewegt werden.

---

§. 161.

Setzt man in Bewegung begriffenem Wasser irgend ein Hinderniß derartig entgegen, daß die Wasserelemente zu einer Ablenkung, Richtungsveränderung veranlaßt werden, oder Richtung und Geschwindigkeit zugleich eine Veränderung erfahren; so wirkt dieser Veränderung das Beharrungsvermögen der flüssigen Masse entgegen, wodurch Kräfte (Drücke) gegen das Hinderniß hervorgerufen werden, die man hydraulische Drücke, oder je nach den Verhältnissen und Umständen, unter welchen sie auftreten, Stoß des Wassers oder Reaction des Wassers zu nennen pflegt.

Bewegen sich feste Körper in ruhendem (oder bewegtem) Wasser, so sind ebenfalls Drücke zu überwinden, die man mit dem Namen Widerstand des Wassers bezeichnet und deren Gesetze, wenigstens im Allgemeinen, dieselben sind als die des Wasserstoßes.

Erstes Kapitel.

Stoss des Wassers.

Der Stoß des Wassers gegen feste Körper ist verschieden von dem Stoße, welcher zwischen festen Körpern unter sich stattfinden kann, weil im ersteren Falle, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, der passive feste Körper von den betreffenden Wassertheilchen ohne Unterbrechung gedrückt wird, während beim Stoße fester Körper unter sich, die dabei hervorgerufene Wirkung die Sache eines Augenblicks ist, nach dessen Verlauf der stoßende Körper seine ganze Bewegungsgröße abgegeben hat. Man sollte daher (richtiger) stets vom hydraulischen Drucke, nicht aber vom Stoße bewegten Wassers reden. Indeß folgen wir im Nachstehenden dem Sprachgebrauche, behalten die Benennung „Wasserstoß" bei und gedenken nur zur rechten Zeit der wahren Auffassung des Gegenstandes.

Für die Praxis ist es wichtig, bei den Untersuchungen über den Stoß des Wassers folgende Unterscheidunden festzustellen:

1. **Stoß eines (isolirten) bestimmt begrenzten Wasserstrahles**, dessen Querschnitte kleiner sind, als die des gestoßenen Körpers.

2. **Stoß unbegrenzten Wassers**, wenn die bewegte Wassermasse den gestoßenen festen Körper überall umgiebt und das Wasser zu beiden Seiten des letzteren mit gehöriger Leichtigkeit und Geschwindigkeit ausweichen kann.

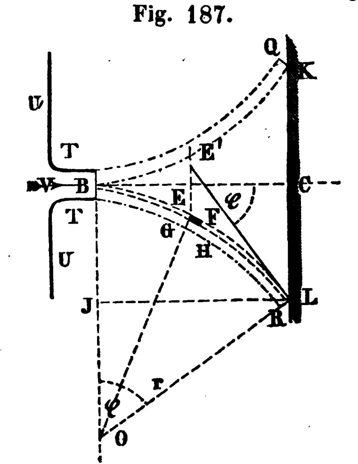
Ferner unterscheidet man noch in beiden Fällen **geraden** und **schiefen** Stoß, je nachdem die Axe des stoßenden Strahles auf der Fläche, welche getroffen wird, normal oder schiefwinkelig steht.

§. 163.

Gerader Stoß eines isolirten Wasserstrahles.

Aus einem beständig voll erhaltenen Gefäße UU', Fig. 187, fließe, nach Eintritt des Beharrungszustandes aus einer Mündung T in horizontaler Richtung ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit $V = \sqrt{2gH}$, dessen ursprüngliche Richtung BC ist. Durch eine feste unbewegliche Ebene QR, die rechtwinklig auf $\overline{BC}$ steht, werden die Wasserfäden von der geraden Richtung ihrer Bewegung abgelenkt, und breiten sich, in Curven ausweichend, symmetrisch derartig um BC herum aus, daß alle Meridianschnitte die Form wie Fig. 187, d. h. die eines ebenen Wasserstrahles haben, sämmtliche Schnitte aber unter einander ähnlich gleich sind.

Fig. 187.



Dabei kann ferner angenommen werden, es flösse das Wasser in Canälen wie $BEFLRGH$ von überall gleicher Weite mit unveränderter Geschwindigkeit fort und die bewegte Wassermasse bilde einen conoidischen Trichter, dessen innerer Raum anzusehen ist, als wäre er mit ruhender, im Gleichgewichte befindlicher Flüssigkeit gefüllt.

Vermöge der Ablenkung, welche durch das Hinderniß QR alle Theilchen der fließenden Wassermasse erfahren, wird aber

an jeder Canalstelle wie E, deren sehr geringe Weite $= \frac{b}{2}$ sein mag, von der hervorgerufenen Fliehkraft ein Druck in der Richtung von O nach E ausgeübt, der (nach §. 58 Geodynamik) ist:

$$(1) \quad m \frac{V^2}{r},$$

sobald m die Masse des Flüssigkeitselementes $GEFH$ und r den Krümmungshalbmesser für den Punkt E des Canales BER bezeichnet. Statt (1) läßt sich daher auch schreiben:

$$(2) \quad \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{b}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \frac{V^2}{r}.$$

Dividirt man diesen Werth durch $\overline{EF}$, so ergiebt sich auf jeden Punkt wie E der Canalwand ein Druck:

$$(3) \quad \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{V^2}{r}.$$

Nimmt man nun an, daß die Flüssigkeitsfäden nach Kreisbogen gekrümmt werden, so lehrt der Ausdruck (3), daß der Druck für die ganze Ausdehnung der Curve BEL constant ist, und daher auch, nach dem hydrostatischen Satze von der gleichen Druckfortpflanzung, ein eben so großer Druck auf jeden Punkt der unverrückbaren Ebene KL ausgeübt wird, gegen welche sich die ganze Flüssigkeitsmasse stützt. Der Druck $= p$ gegen eine gerade Linie wie $\overline{KL}$ ist sonach:

$$(4) \quad p = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{b}{2} \cdot V^2 \cdot \frac{\overline{KL}}{r}.$$

Stellt man sich ferner vor, daß, in der ganzen Ausdehnung der Grundfläche des Conoids BLK, überhaupt n Linien wie $\overline{KL}$ vorkommen, so ergiebt sich der hydraulische Totaldruck $= P$ oder der Stoß des Wassers gegen die feste Ebene QR zu:

$$(5) \quad P = n \cdot p = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{n \cdot b}{2} \cdot V^2 \cdot \frac{\overline{KL}}{r}.$$

Es ist aber $n.b$ gleich dem Querschnitte $= A$ des aus der Mündung bei B hervortretenden Strahles, so daß man statt (5) auch schreiben kann:

$$(6) \quad P = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{A}{2} \cdot V^2 \cdot \frac{\overline{KL}}{r}.$$

Jetzt bleibt nur noch übrig, den Werth $\frac{\overline{KL}}{r}$ näher zu bestimmen, was leicht wie folgt geschieht. Es bezeichne φ den Winkel, welchen das äußerste Curvenelement L oder die Tan-

gente des gekrümmten Wasserfadens daselbst mit der Axe $\overline{BC}$ oder der Normale auf KL einschließt, so wird, wenn man die LJ rechtwinklig gegen OB zieht, $\angle LOJ = \varphi$ und $\overline{JB} = r(1 - \cos.\varphi)$. Es ist aber $\overline{JB}$ auch gleich $\frac{\overline{KL}}{2}$, daher $\overline{KL} = 2r\,(1 - \cos.\varphi)$ und somit nach (6)

$$\text{I.}\quad P = \frac{\gamma}{g}\,A.V^2\,(1 - \cos\varphi).$$

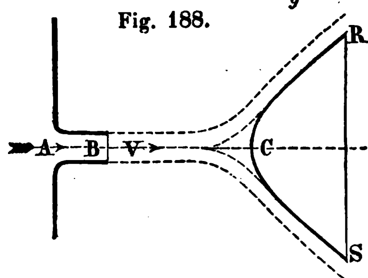


Fig. 188.

Letzterer Werth entspricht auch dem hydraulischen Drucke eines isolirten Strahles gegen ein convexes Conoid *CRS*, Fig. 188, von solcher Ausdehnung und Form, daß alle Wasserfäden am Umfange desselben mit der ursprünglichen Strahlrichtung $\overline{BC}$ den Winkel φ einschließen.

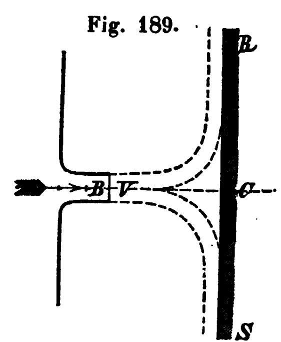


Fig. 189.

Für $\varphi = 90^\circ$, d. h. wenn die Ausdehnung der Ebene *QR* so groß ist *), daß alles Wasser parallel zu derselben, wie Fig. 189 zeigt, abfließen muß, wird

$$\text{II.}\quad \begin{cases} P = \frac{\gamma}{g}\,.\,A.V^2, \text{ oder} \\ P = \gamma\,.\,A\,.\,2H. \end{cases}$$

Hiernach ist der hydraulische Druck, oder der Stoß eines isolirten Wasserstrahles, gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche die gedrückte Fläche zur Basis und zur Höhe die doppelte der Geschwindigkeit des fließenden Wassers entsprechende Höhe hat.

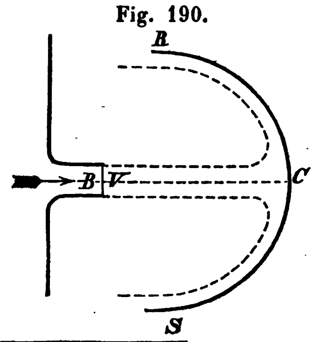


Fig. 190.

Wird das Wasser ähnlich wie Fig. 190 genöthigt, in der genau entgegengesetzten Richtung abzufließen, in wel-

*) Nach Seite 450 mindestens vierfacher Strahlquerschnitt.

cher es ankam, so wird in I. $\varphi = 180$ und daher:

$$\text{III.} \quad P = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot 2V^2 = \gamma \cdot A \cdot 4H,$$

d. h. man erhält einen doppelt so großen hydraulischen Druck wie unter II.

Führt man in I. die pr. Secunde zuströmende Wassermenge $Q = AV$ ein, so folgt:

$$\text{IV.} \quad P = \frac{\gamma}{g} QV (1 - \cos \varphi).$$

Bewegt sich endlich die feste Ebene QR mit der Geschwindigkeit v in derselben Richtung oder in der genau entgegengesetzten des ankommenden Wassers, so wird zur Bestimmung des entsprechenden hydraulischen Drukes nur nöthig sein, in IV. statt V die relative Geschwindigkeit $V \pm v$ einzuführen, so daß sich überhaupt ergiebt:

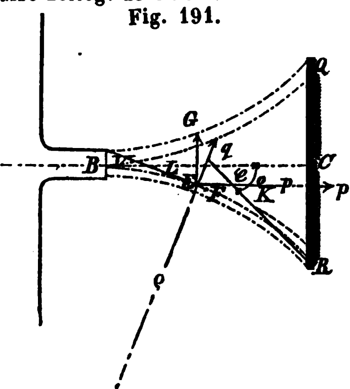
$$\text{V.} \quad P = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v)(1 - \cos . \varphi).$$

[§. 164.]

Ohne die besondere Voraussetzung des vorigen Paragraphen, daß die Krümmungen der Wasserfäden, bei ihrer Ablenkung von der geraden Richtung, nach Kreisbogen gebildet werden, läßt sich die Fundamentalgleichung I. auf nachstehende Weise ableiten.

Es sei BER, Fig. 191, wiederum einer der äußerst dünnen Canäle vom Querschnitte $= a$, welche man sich die ganze stoßende, flüssige Masse zerlegt denken kann. Ferner sei $EF = ds$ ein unendlich kleines Canallängenstück, so wie ϱ der Krümmungshalbmesser eines Punktes E der beliebigen Curven daselbst, wonach die Wege der Wassertheilchen sich gestalten und endlich α der Winkel, welchen die Tangente bei E mit der ursprünglichen Strahlaxe BC bildet. Wenn sonst die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten werden, erhält man für den Druck q, welcher in E (in der Richtung des Krümmungshalbmesser wirkend) durch die hervorgerufene Fliehkraft ausgeübt wird:

Fig. 191.



$$q = \frac{\gamma}{g} \cdot a \cdot ds \frac{V^2}{\varrho}.$$

Zerlegt man q normal zu BC und in die Richtung dieser Geraden, so verbleibt als Druck gegen die Ebene QR, die Composante $EF = p$, während sich, durch die gleiche Zerlegung am diametral gegenüber liegenden Elemente, die Composanten wie EG aufheben. Es ist also

$$p = \frac{\gamma}{g} . a ds . \frac{V^2}{\varrho} . \sin \alpha,$$

oder weil $ds = \varrho . d\alpha$ ist:

$$p = \frac{\gamma}{g} a . V^2 . \sin \alpha . d\alpha.$$

Genau derselbe Werth ist aber für jeden der n Wasserfaden nachzuweisen, in welche man den Strahl vom Querschnitte A zerlegt denken kann, so daß sich wiederum für den Gesammtdruck $= P$ ergiebt, welchen die Fläche QR auszuhalten hat:

$$P = \frac{\gamma}{g} A V^2 \int_0^\varphi d\alpha \sin \alpha, \text{ d. i.}$$

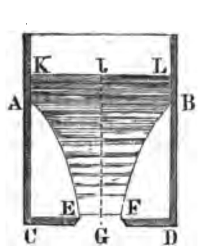
$$P = \frac{\gamma}{g} A v^2 (1 - \cos \varphi).$$

Anmerkung. Abgesehen von der höchst unvollkommenen Erklärung Newton's *) über den Stoß des Wassers isolirter Strahlen, behandelte zuerst Daniel Bernoulli 1736 in den Commentarii acad. scient. imp. Petropol. T. VIII. p. 99 diesen Gegenstand in der diesem Hydrauliker eigenen selbstständigen und scharfsinnigen Weise, indem er die

---

*) Newtoni: Philosophiae naturalis principia mathematica. Propositio XXXVI. Probl. VIII, Coriol. II, (erste Ausgabe 1687, zweite von 1714) enthält hierüber Folgendes: „Die Kraft, wodurch die ganze Bewegung des aus ($\overline{EF}$, Fig. 192) strömenden Wassers hervorgebracht werden kann, ist gleich dem Gewichte einer cylindrischen Wassersäule, deren Basis die Oeffnung EF und deren Höhe $2 . \overline{GJ}$ oder $2 . \overline{CK}$ ist. Denn das heraustretende Wasser kann in der Zeit, wo es dieser Wassersäule gleich kommt, seine Ausflußgeschwindigkeit dadurch erreichen, daß sein Gewicht von der Höhe $\overline{GJ}$ herabfällt."

Fig. 192.



Dabei dachte sich Newton das Gefäß in den Umgebungen über der Mündung EF voll Eis, so daß das Wasser gleichsam wie durch einen Trichter $AEFB$ hindurch gehen müßte, das Eis aber auch noch in Ruhe verbliebe, selbst wenn es in fließendes Wasser aufgelöst sei etc.

Schätzung der Kraft unternahm, die einen bewegten Körper von seiner ursprünglichen Bahn ablenkt, und insbesondere zeigte, daß auch hier diese Kraft keine andere als die sogenannte Fliehkraft sei.

Die vollständige Auflösung giebt Bernoulli, §. 12 a. a. O. (zweiter Theil), woselbst er zu der Formel gelangt:

$$P = \frac{\gamma A}{g} \cdot V^2 \left(1 - \cos\varphi \cdot \sqrt{\frac{h}{H}}\right).$$

Hierin bezeichnen H und h Geschwindigkeitshöhen, erstere die von V, letztere die, welche der Geschwindigkeit an der Stelle entspricht, wo der Tangentenwinkel der durch die Ablenkung gebildeten Curve mit der ursprünglichen Strahlaxe der Größte $= \varphi$ und wobei selbstverständlich $h < H$ ist.

Für $H = h$ ergeben sich unsere vorher abgeleiteten Formeln.*)

Mit noch mehr Klarheit entwickelte dieselbe Gleichung 1745 Leonhard Euler in seiner Uebersetzung von Robin's „Grundsätze der Artillerie“ (Anmerkungen, p. 45f und 458), aus dem Englischen, indem er dabei ebenfalls die Kraft aufsucht, welche zur Veränderung der Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit aller Theile der flüssigen Masse erforderlich ist, wenn sie nach ihrem Austritte aus einer Gefäßmündung, zur Wirkung gegen eine unveränderliche feste Ebene veranlaßt wird.

Höchst wahrscheinlich, ohne Bernoulli's und Euler's Theorien zu kennen, behandelte Lagrange die Aufgabe (Mém. de l'académie royale des sciences de Turin. Prem. Partie 1784 et 1785, pag. 95) in ähnlicher Weise, wie oben §. 163 geschah, d. h. unter den Voraussetzungen, daß die Geschwindigkeit der Wasserelemente während ihrer ganzen Ablenkung dieselbe bleibe und die dabei gebildeten Curven Kreisbogen wären.

Nach genannten Männern haben sich mit der wissenschaftlich theoretischen Behandlung der ganzen Wasserstoß-Aufgabe insbesondere beschäftigt: Coriolis in seinem Werke „Du Calcul sur l'effet des machines“. Paris 1829, pag. 59 (dabei Lagrange's Principen benutzend) und Navier in den „Résumé des Leçons etc., Deuxième Partie, Nr. 160, Paris 1838“, indem er dabei von Bestimmung des Gesammtdruckes bewegter Flüssigkeit gegen Gefäßwände ausgeht, so wie endlich Weisbach 1846 in seiner Ingenieur-Mechanik, woselbst er die Theorie des Wasserstoßes zuerst nach dem Principe der mechanischen Arbeit auffaßte und durchführte.

§. 165.

Schiefer Stoß eines isolirten Wasserstrahles.

Es wird kaum besonderer Erwähnung bedürfen, daß die in den vorigen Paragraphen entwickelten Ausdrücke für den geraden

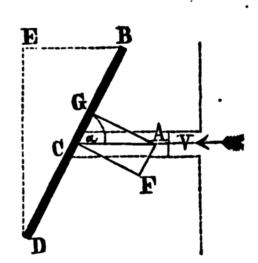
*) Wir sind dieser von Lagrange gemachten Annahme gefolgt, weil es bis jetzt noch Niemand gelungen ist, das Abhängigkeitsgesetz der Größe h von der Höhe H zu entdecken.

Stoß eines isolirten Wasserstrahles hauptsächlich als praktische Aushülfsmittel beim Mangel eines Besseren angesehen werden müssen, die in einigen besonderen Fällen recht gut mit der Erfahrung übereinstimmen; nicht aber als mathematische Theorien, welche die betreffenden Naturgesetze unter allen Umständen darzustellen im Stande sind.

Noch schwieriger wird deshalb auch die Auflösung des Problems über die Wirkung eines Wasserstrahles, welcher ursprünglich schief gegen die Ebene gerichtet ist, die er stößt.*) Ohne uns unter diesen Umständen auf nicht durchaus haltbare Hypothesen zu stützen, wählen wir zur Herleitung brauchbarer Ausdrücke für praktische Zwecke ein ganz einfaches Verfahren (nach Langsdorf und Eytelwein).

Es sei $\overline{BD}$, Fig. 193, die unbeweglich feste Ebene, gegen welche der Wasserstrahl vom Querschnitte $= A$ in der Richtung $\overline{AC}$ trifft, wobei seine Axe mit der Ebene einen Winkel $ACB = \alpha$ bildet und die Wasserelemente sämmtlich die Geschwindigkeit V besitzen. Ferner sei P die Kraft, mit welcher das Wasser gegen eine Ebene DE wirken würde, die rechtwinklig auf der Richtung der Strahlaxe AC steht.

Fig. 193.



Stellt man P durch AC dar und zerlegt normal (in CF) zur Ebene $\overline{BD}$ und (in CG) in die Richtung der letzteren, so verbleibt $\overline{CF}$ als der sogenannte Normalstoß $= N$ gegen die Fläche, während $\overline{CG}$ als in der Richtung der Ebene liegend, wirkungslos gegen die letztere ist,

*) Lagrange sagt u. A. §. 9 seiner vorher citirten Arbeit, „daß die Behandlung des Problemes des schiefen Stoßes vom Standpunkte der Mathematik nur eine analytische Uebung darbieten würde, ohne Nutzen für irgend welchen Zweck der Anwendung". Langsdorf (S. 187 seiner 1794 erschienenen Hydraulik) bemerkt ebenso hierüber ganz richtig: „Alle diese großen Männer (D. Bernoulli, d'Alembert, L. Euler etc.) haben durch ihre tiefsinnigen Untersuchungen nicht sowohl die Lehre vom Stoße des Wassers, als die von Anwendung analytischer Kunstgriffe auf angenommene Hypothesen, zu einer höheren Vollkommenheit gebracht." — Aussprüche, die für den heutigen Standpunkt der Sache noch unverändert gültig sind!

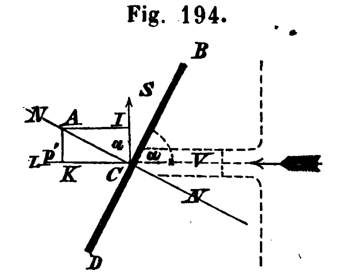
also verloren geht. Wegen $CF = CA \,.\, \sin\alpha$ erhält man daher ohne Weiteres:

$$N = P \,.\, \sin\alpha,$$

oder wenn für P der betreffende Werth aus II, §. 163, gesetzt wird:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} N = \dfrac{\gamma A}{g} \,.\, V^2 \,.\, \sin\alpha, \text{ oder auch} \\ N = \dfrac{\gamma}{g} Q \,.\, V \,.\, \sin\alpha \end{cases}$$

Fig. 194.



Zerlegt man ferner $N = CA$, Fig. 194, parallel (in CK) und rechtwinklig (in CJ) zur Strahlaxe, so erhält man beziehungsweise den sogenannten Parallelstoß $CK = P'$ und den Seitenstoß $CJ = S$ zu:

$$\text{II.} \quad P' = N \,.\, \sin\alpha = \frac{\gamma A}{g} \,.\, V^2 \sin\alpha^2 = \frac{\gamma}{g} Q \,.\, V \,.\, \sin\alpha^2.$$

$$\text{III.} \quad S = N \,.\, \cos\alpha = \frac{\gamma A}{g} V^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \frac{\gamma Q}{g} \,.\, V \,.\, \sin\alpha \cos\alpha.$$

Für den relativen Stoß, wenn sich die Ebene mit der Geschwindigkeit v in der Richtung von V oder genau entgegengesetzt derselben bewegt, folgt sodann:

$$\text{IV.} \quad N = \frac{\gamma Q}{g} (V \pm v) \sin\alpha;$$

$$\text{V.} \quad P' = \frac{\gamma Q}{g} (V \pm v) \sin\alpha^2;$$

$$\text{VI.} \quad S = \frac{\gamma Q}{g} (V \pm v) \sin\alpha \,.\, \cos\alpha.$$

Zusatz. In neuerer Zeit leitet man (ursprünglich nach den Vorgängen Navier's und Duchemin's *) den schiefen Stoß eines isolirten Strahles gegen eine feste Ebene dadurch ab, daß

*) Experimental-Untersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten, deutsch von Schnuse, Braunschweig 1844, §. 52 etc.

man annimmt, der Wasserstrahl theile sich auf der Ebene in zwei oder vier Theile, und werde auch so genöthigt, abzufließen. Um wenigstens für den ersten dieser Fälle den betreffenden Rechnungsgang kennen zu lernen, nehmen wir wir an, daß sich die ganze zum Stoße gelangende Wassermenge Q in zwei Theile q und q' theilt, die nach zwei entgegengesetzten Richtungen abzufließen gezwungen sind, die mit der Ebene BD beziehungsweise die Winkel α und $180 - \alpha$ einschließen.

Fig. 195.

Für den Parallelstoß P' erhält man sodann, nach dem Vorhergehenden:

$$(1)\quad P' = \frac{\gamma q}{g}(V \pm v)(1 - \cos\alpha) + \frac{\gamma q'}{g}(V \pm v)(1 + \cos\alpha).$$

Weiter nimmt man an, daß das Gleichgewicht der beiden Strahltheile fordert:

$$q(V \pm v)(1 - \cos\alpha) = q_1 (V \pm v)(1 + \cos\alpha),$$

woraus wegen $Q = q + q_1$ folgt:

$$q = \frac{Q}{2}(1 + \cos\alpha) \text{ und } q_1 = \frac{Q}{2}(1 - \cos\alpha)$$

und deshalb aus (1) wird, wenn man daselbst q und q_1 eliminirt:

$$P' = \frac{\gamma Q}{g}(V - v)(1 - \cos\alpha^2) = \frac{\gamma Q}{g} . V . \sin\alpha^2.$$

Betrachtet man nun wieder, wie vorher Fig. 194, den Normalstoß N als die Resultante aus dem Parallelstoße P' und dem Seitenstoße S, so folgt abermals

$$N = \frac{P'}{\sin\alpha} = \frac{\gamma Q}{g} . V . \sin\alpha \text{ und}$$

$$S = P' . \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\gamma Q}{g} . V . \sin\alpha . \cos\alpha.$$

Anmerkung. Für den Fall, daß der flüssige Strahl Freiheit hat, sich nach allen Seiten über die feste Ebene zu verbreiten und abzufließen, findet

Duchemin*): $N = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) \frac{2 . \sin\alpha^2}{1 + \sin\alpha^2}$ (d. h. für den Normalstoß),

*) Experimental-Untersuchungen, S. 62.

Weisbach *): $P' = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) . \frac{2 \sin \alpha^2}{1 + \sin \alpha^2}$ (d. h. für den Parallelstoß),

Scheffler **): $N = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) \sin \alpha$ und

$$P' = \frac{\gamma}{g} Q (V \pm v) \sin \alpha^2.$$

Die Nichtübereinstimmung dieser Werthe ist nur eine Bestätigung unserer früheren Bemerkungen über den gegenwärtigen Standpunkt der Theorie des Wasserstoßes.

§. 166.

Versuchsresultate über den Stoß isolirter Wasserstrahlen.

Die Rechnungsresultate der wesentlichsten Formeln vorstehender Paragraphen stimmen, wie bereits bemerkt, in vielen Fällen mit den Erfahrungen in einer Weise, welche für die Praxis als hinreichend bezeichnet werden kann, wie aus den betreffenden Versuchen zu entnehmen ist und wovon die Vorzüglichsten im Nachstehenden aufgeführt werden sollen.

Die ersten Versuche zur Ermittelung der Größe des Wasserstoßes scheinen im Jahre 1667 unter den Auspicien der Academie der Wissenschaften zu Paris angestellt worden zu sein. [3]) Hierauf sind zwar bald viele andere gefolgt, die aber meistentheils der einmal vorgefaßten (irrigen) Idee der Experimentatoren entsprechen, daß die Kraft des vor der Ausflußöffnung von einer festen Ebene aufgenommenen Wasserstromes unter allen Umständen gleich dem Gewichte des über der Oeffnung, in der Höhe des Wasserstandes, errichteten Wasserprismas sei. D. Bernoulli's eigene Versuche (im Gegensatze zu denen einer gewissen Kraft) bestätigten zwar seine (richtige) Theorie, entfernten jedoch nicht alle Zweifel, was erst späteren Zeiten und nach Experimenten, welche mit vollkommeneren Apparaten angestellt wurden, aufbehalten blieb.

In dieser Beziehung sind zunächst die Versuche Bossut's [5]) zu erwähnen, der sich dabei eines Apparates bediente, wie Fig. 196 zeigt.

Im hinlänglich großen Wasserbehälter *VXYZ* ist eine Bodenöffnung *PQ* vom kreisförmigen Querschnitt angebracht, außerhalb mit einem cylindrischen Ansatzrohr *pq* von solcher Kürze versehen, daß der Ausfluß dennoch wie aus der dünnen Wand erfolgte. In mindestens 1 Zoll Abstand von der äußeren Mündungskante war eine kreis-

1) Ing. Mechanik, 3. Auflage, Bd. 1, S. 879.
2) Principien etc. der Hydraulik, 2. Bd., S. 125.
3) Kästner: Hydrodynamik, S. 294, II und S. 296, III.
4) Hydrodynamique, T. II, Nr. 856.



Fig. 196.

förmige Kupferplatte *A* von $2\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser an dem einen Ende des Wagbalkens einer doppelarmig, gleicharmigen Wage *AB* angebracht. Gegen die Platte *A* ließ man den stoßenden Strahl wirken und maß den entsprechenden hydraulischen Druck dadurch, daß man in die Wagschale so lange Gewichte legte, bis der Wagbalken *AB* genau horizontal stand. Einige der wesentlichen Resultate des geraden Stoßes sind in folgenden Täfelchen zusammengestellt, wobei bemerkt werden muß, daß Bossut den Contractionscoefficienten $= \alpha$ überall $= 0{,}64$ voraussetzte.

Druckhöhe	Durchmesser der Mündung	Größe des Stoßes	
		nach d. Beobachtung	nach der Rechnung
4 Fuß	10 Linien	12608 Grains *)	13030 Grains
4 „	6 „	4484 „	4691 „
2 „	10 „	6306 „	6518 „
2 „	6 „	2243 „	2345 „

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ist den Umständen nach als entsprechend zu bezeichnen, und würde wahrscheinlich noch besser gewesen sein, hätte Bossut genau genug die Größe des zusammengezogenen Strahles ermittelt. Bossut macht überdies besonders aufmerksam, daß sich der Stoß nur halb so groß ergab, wenn die Platte *A* unmittelbar vor der Mündung *pq* angebracht wurde; übrigens war der Querschnitt von *A*, selbst beim stärksten Strahlquerschnitte immer noch über 9 mal so groß als der letztere. **)

Ferner bemerkenswerthe Stoßversuche stellte Michelotti (der Sohn ***) mit Hülfe der Fig. 142 abgebildeten Schnellwage an. Der Ausfluß erfolgte aus horizontal gerichteten Ansatzröhren, entweder von quadratischem Querschnitte, wobei der zusammengezogene Strahl 0,785 Quadratzoll Inhalt hatte, oder vom kreisförmigen Querschnitte bei 0,6215 Quadratzoll des zusammengezogenen Strahles. Der Abstand zwischen der gestoßenen Ebene und der äußeren Kante der Ausflußmündung betrug überall 14,166 Zoll. Die Strahlaxe war stets normal zur gestoßenen Ebene gerichtet. Von seinen 13 Versuchen mögen hier nachstehende vier Platz finden:

*) 1 Pfund (Livre) = 9116 Grains. Ein Cubikfuß Wasser = 70 Pfund.

**) Minder bedeutsam sind die Versuche Dubuat's über den Stoß einer isolirten Strahles gegen eine unbewegliche ebene Fläche, weshalb wir nur auf die Principes, Nr. 425, verweisen.

***) Hydraulische Versuche. Deutsch v. Eytelwein. Anhang, S. 251.

Strahlform	Druckhöhe in Pariser Zoll	Wasserstoß, in Unzen ausgedrückt	
		berechnet	beobachtet
Quadrat . . .	249,775	251,727	251,152
	249,50	251,4498	251,1520
Kreis . . .	250,0	199,492	199,4297
	248,5	198,295	198,286

Bei Weitem ausführlichere Versuche hat Langsdorf beim Ausflusse des Strahles aus Seitenöffnungen angestellt und sich dabei eines Apparates bedient, der im Allgemeinen mit dem (von Morosi und Bidone) weiter unten (Fig. 199) abgebildeten übereinstimmt. *)

Den überhaupt gewonnenen Versuchsresultaten (145 Versuche, wovon 79 über geraden, 66 über schiefen Stoß isolirter Strahlen) entlehnen wir folgende Zusammenstellung, wobei keine weitere Auswahl als die gemacht ist, daß solche Versuche zusammengestellt wurden, wobei die Druckhöhen für geraden und schiefen Stoß dieselben waren.

Der Querschnitt des zusammengezogenen Strahles betrug überall 1,9468 pariser Quadratzoll, der Abstand der Stoßfläche von der Ausflußmündung 8 Zoll. **) Das Gewicht eines Pariser Cubikzoll Wassers wurde zu 0,0389 Nürnberger Pfund berechnet.

Nr. der Langsdorf'schen Versuche		Druckhöhe $= h_1$ in Pariser Zoll und Linien	Gerader Stoß $= P$		Größe des Stoßwinkels	Schiefer Stoß $= P'$	
Gerader Stoß	Schiefer Stoß		berechnet aus $P = 0,1514.h$	beobachtet		berechnet aus $P' = P.\sin^2\alpha$	beobachtet
70	63	42″ 4‴	6,409 ℔	6,900 ℔	26° 16′	1,2552 ℔	1,2940 ℔
49	34	42″10‴	6,485	6,900	33° 16′	1,9513	2,0842
77	27	39″10‴	6,0307	6,3250	39° 46′	2,4675	2,5450
76	22	40″ 4‴	6,1064	6,3968	50° 46′	3,6720	3,5347
65	9	43″ 7‴	6,5985	6,900	60° 16′	4,9754	5,3727
54	1	39″ 1‴	5,9172	6,3250	70° 16′	5,2426	5,6700

*) Lehrbuch der Hydraulik, Altenburg 1794, S. 189 etc.

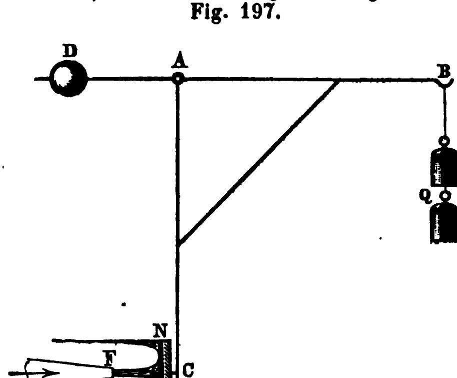
**) Ueber die vortheilhafteste Entfernung der Mündung von der gestoßenen Fläche gelangte Langsdorf zu keinem bestimmten Resultate. Vor der Ausbreitung des Strahles, in geringerer Entfernung als $1\frac{1}{2}$ Zoll von der Mündung, wurde der Stoß immer mehr durch die einfache Druckhöhe (statt der doppelten) repräsentirt, auf welche unmittelbar vor der Mündung der Stoß auch vollständig herabgezogen wurde (a. a. O. §. 204).

Jedenfalls ist auch hier die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch als genügend zu bezeichnen, die noch größer gewesen wäre, hätte Langsdorf nicht überall den Ausflußcoefficienten 0,62 für die dünne Wand, sondern den Contractionscoefficienten (wahrscheinlich 0,64) in Rechnung gebracht.

Wichtig ist noch der von Langsdorf ermittelte Satz, daß der isolirte Strahl, um ganz zu wirken, im Stande sein muß, sich in einem Kreise auszubreiten, dessen Durchmesser wenigstens viermal so groß ist als der des Strahles.

Interessant und bemerkenswerth sind die Versuche des Italieners Morosi. *) Unter Zuziehung eines Fig. 197 abgebildeten Hebelapparates der sich um A als Axe drehte und wobei der Wasserstrahl an der conisch convergenten Ausflußöffnung einen Quadratzoll (pariser Maß) Querschnitt hatte, die gestoßene Fläche wenigstens 8 mal Strahlquerschnitt als Ausdehnung hatte und endlich der Mündungsabstand von der gestoßenen Ebene etwa 3 mal kleinster Strahldurchmesser betrug, fand Morosi, daß, unter sonst gleichen Umständen, der Stoß ungefähr doppelt so groß wurde, wenn man am Umfange der gestoßenen quadratischen Platte Erhöhungen (Ränder oder Leisten) von mindestens $6\frac{1}{2}$ Linien Höhe anbrachte, wodurch (wie Fig. 197 zeigt) das Wasser genöthigt wurde in genau entgegengesetzter Richtung abzufließen, als die war, in welcher es ankam.

Fig. 197.



Seine speciellen Resultate sind in folgendem Täfelchen zusammengestellt:

Druckhöhe	Beobachtete Stoßkraft ohne Randplatte	Beobachtete Stoßkraft mit Randplatte	Berechnete Stoßkraft $P = \gamma . A . 2H = 0,97 . 2H$ **)
6 Fuß	5 ℔	11 ℔	5,83 ℔
8 „	7 „	15 „	7,77 „
10 „	9 „	20 „	9,72 „

*) Memorie dell' Imperiale Reggio Instituto del Regno Lombardo-Veneto. Volume primo. Anni 1812 e 1813, pag. 119. Milano 1819.

**) $\gamma = 70$ Pariser Pfund.

Hierdurch erhält besonders die Formel III, §. 163, ihre Bestätigung.

Bei einem anderen Versuche *) hat Morosi eine Anordnung, wie Fig. 198 erkennen läßt, getroffen, wobei jedes Wassertheilchen die Platte *M* des Hebelwerkes **zweimal** stößt, nämlich einmal in seinem centralen Theile, ein anderes Mal in dem Theile, welcher zwischen beiden Rädern enthalten ist. Nach dem letzten Stoße strömt das Wasser ziemlich unter 180 Grad Winkel zurück. Um hierbei das Gleichgewicht der Wage herzustellen, mußte Morosi 8,30 ℔ in die Schale legen, während bei Anwendung der Platte, Fig. 197, mit nur einem Rande, unter sonst gleichen Umständen, nur 4,50 ℔ erfordert und ohne jeglichen Rand sogar nur 2,50 nöthig wurden.

Fig. 198.

Es verhalten sich hierbei also die drei verschiedenen Stoßwirkungen wie 83 : 45 : 25 = 3,32 : 1,8 : 1.

Fig. 199.

Auch dies Resultat stimmt gut mit d. Bernoulli-Euler'schen Stoßausdrucke, §. 164 (Anmerk.), wenn man dort $H = h$ setzt und den betreffenden Werth ($\varphi = 180$ gesetzt) für die 2 gleichzeitigen Stöße addirt. **)

Die umfangreichsten Versuche über den Stoß isolirter Wasserstrahlen hat bis jetzt Bidone ***) in den Jahren 1835 und 1836 angestellt, aus deren Resultaten hier einige besonders werthvolle Mittheilungen gemacht wer-

*) Memorie etc. p. 309.

**) Hierher gehörige Rechnungen hat in bemerkter Weise zuerst Bidone geführt, worüber dessen vortreffliche Abhandlung „Experiences sur la percussion des veines d'eau", Seite 130 der Memorie della Reale Academia delle science di Torino, Tomo XI (1838) nachzulesen ist. Auszüge hieraus folgen im Nachstehenden.

***) a. a. O. Seite 81.

den sollen. Bidone's Versuchsapparat ist Fig. 199 abgebildet. Dabei ist A wieder die Halbdrehaxe, ferner als Armverhältniß $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{25}{81}$. Die Entfernung der Ausflußöffnung V von der gestoßenen Platte L betrug stets 6 Zoll, bei welcher Entfernung der Stoß am stärksten und der Strahl gleichzeitig noch sichtbar horizontal (rechtwinklig zur Platte) war. Aus seiner ersten Versuchsreihe entlehnen wir (im Auszuge) nachfolgende Tabelle, wobei m den Coefficienten der Formel $P = m.\gamma.\mathcal{A}.H$ bezeichnet, der nach der Theorie $= 2$ sein müßte, allgemein aber nach Bernoulli-Euler ist: $m = 2\left(1 - \cos\varphi \sqrt{\frac{h}{H}}\right)$.

Durchmesser der gestoßenen Platte in Pariser Linien	Werthe von m		
	Strahldurchm. 9‴ Druckhöhe 3061‴ Geschw. V=28,56′	Strahldurchm. 12‴ Druckhöhe 3071‴ Geschw. V=28,56′	Strahldurchm. 16‴ Druckhöhe 3068‴ Geschw. V=28,76′
24‴	2,0940	1,9202	1,5630
36	2,0940	2,2198	2,0423
48	2,0849	2,2099	2,0859
60	2,0582	2,2198	2,0804
72	2,0760	2,2296	2,1458
108	2,0582	2,2296	2,1349

Aus Versuchen, um den Einfluß des Plattenabstandes von der Mündungskante zu beurtheilen, entlehnen wir Nachstehendes, wobei e den bemerkten Abstand der 6 Zoll im Durchmesser haltenden Platte bezeichnet, δ den kleinsten Strahldurchmesser in Linien und V die Geschwindigkeit des Wassers in Fußen.

e	m		
	$\delta = 9$ $V = 28,23$	$\delta = 12$ $V = 28,23$	$\delta = 16$ $V = 28,76$
0	1,6259	1,5839	1,5358
6	1,9565	2,1447	2,0641
12	1,9654	2,1545	2,0668
24	1,9745	2,1595	2,0750
36	1,9834	2,1693	2,0804
48	2,0191	2,1987	2,1131
60	2,0637	2,2135	2,1458
72	2,0726	2,2184	2,1458

Ueber 72 Linien Entfernung hinaus änderten sich Querschnitt und Form des Strahles derartig, daß eine theoretische Vergleichung nicht

räthlich erschien. Zu einer mathematischen Bestimmung des Einflusses von *e* gelangte Bidone nicht. In einer anderen Reihe von Versuchen bestätigte Bidone die von Morosi gefundenen Resultate über die Vermehrung der Stoßkraft des Wassers, wenn man die gestoßenen ebenen Flächen (Platten) mit Einfassungen oder Rändern (wie bei Fig. 197) versieht. Aus diesen Versuchen folgt, daß für jeden Strahl und für jede gegebene Platte, es einen Rand rechtwinklig zur Platte und von gewisser Höhe giebt, für welche der Stoß ein Maximum wird. Den größten Werth für den bereits vorher bemerkten Coefficienten *m* erhielt Bidone bei einem Strahle von 12 Linien Durchmesser und einer gestoßenen Platte von 36 Linien Durchmesser, wenn letztere mit Rändern von 3½ Linien Höhe versehen und endlich die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers 28,21 Fuß pr. Secunde war. Diese Versuchsreihe mag hier speciell noch Platz finden.

Randhöhe in Linien	0	1	2	2½	3	3½	4	5	6	9	12	18
Werthe des Coeff. *m*	2,094	3,114	3,418	3,383	3,374	3,365	3,347	3,302	3,284	3,221	3,168	3,114

Zu einem allgemeinen Gesetze über diese Erscheinung gelangte Bidone ebenfalls nicht.

Noch werde einer Versuchsreihe über den sogenannten **ersten Stoß** eines isolirten Strahles gedacht, d. h. des Stoßes, welcher im Augenblicke erfolgt, wo der aus der geöffneten Mündung strömende Strahl die Platte zum ersten Male trifft. Dieser Stoß ist jederzeit viel größer, wie der andauernde (permanente) Stoß desselben Strahles gegen dieselbe Platte.

Folgende Tabelle belehrt weiter hierüber.

Durchmesser der gestoßenen Platte in Linien	Strahl von 9 Linien Durchmesser			Strahl von 16 Linien Durchmesser		
	Höhe des Randes der Platte in Linien	Größe des permanenten Stoßes in Unzen	Größe des ersten Stoßes in Unzen	Höhe des Randes der Platte in Linien	Größe des permanenten Stoßes in Unzen	Größe des ersten Stoßes in Unzen
24	0	117,55	204,95	0	288,34	385,79
	3	201,94	301,40	6½	502,33	602,80
36	0	117,55	223,04	0	376,75	566,63
	2	191,89	277,29	5	710,30	807,75
48	0	117,04	229,04	0	384,79	638,97
	2	185,86	265,23	4½	693,22	831,87
60	0	115,54	217,81	0	383,78	614,86
	3½	175,82	289,34	4½	675,14	855,98

Die allerjüngsten Versuche über den Stoß isolirter Strahlen verdankt man Weisbach *), wobei als **ganz besonders neu** die Ver-

*) Die Experimental-Hydraulik, Freiberg 1855, S. 254 etc. Eine

suche dieses Hydraulikers über die Größe des Stoßes gegen eine bewegte Fläche zu bezeichnen sind. Die Methode der Bestimmung bestand darin, daß die zu stoßende Fläche mit einem sogenannten Reactions-Wasserrade derartig in Verbindung gebracht wurde, daß sie den aus der Schwungrohrmündung tretenden Wasserstrahl auffing.

Das Gesammtresultat aus diesen Versuchen ist die (den Umständen nach) gute Uebereinstimmung der §. 163 und §. 164 entwickelten Formeln für den geraden Stoß isolirter Strahlen mit der Erfahrung, sowohl für den Stoß des Wassers gegen ruhende als gegen bewegte Flächen.

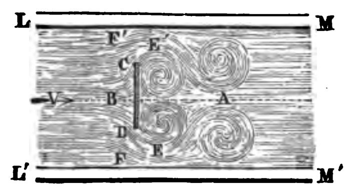
Weniger gute Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie zeigte sich bei den Versuchen über den schiefen Stoß des Wasserstrahles *), was unsere §. 165 gemachten Bemerkungen über die mathematische Abschätzung dieser Stoßgattung nur bestätigt.

§. 167.

Stoß unbegrenzten Wassers gegen ebene Flächen.

Bei der Betrachtung des Stoßes einer unbegrenzten Wassermasse gegen eine unbewegliche feste Fläche CD, Fig. 200, bemerkt man leicht, daß die Flüssigkeitsfäden innerhalb eines gewissen Raumes $LML'M'$ (gleichsam in dem Bereiche eines prismatischen Canales) mehr oder weniger von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt, zu einer Divergenz und endlich zum Herumgehen um die äußeren Kanten C und D veranlaßt werden, wobei sich in einem bestimmten Raume B vor der Fläche sogen. Vorderwasser (proue fluide) bildet, was unbeweglich zu sein scheint, obwohl seine Geschwindigkeit nur geringer als die der umgebenden Flüssigkeit ist. Beim Strömen der übrigen Wasserelemente von B nach C hin bemerkt man sofort eine Geschwindigkeitszunahme, die um so größer wird, je bedeutender

Fig. 200.



besondere Bearbeitung dieser Versuche hat Zeuner in seinem „Civilingenieur", Neue Folge, Bd. 1, Seite 1 geliefert, worauf wir ganz besonders aufmerksam machen.

*) Zeuner, a. a. O., Seite 12 (unten).

die horizontale Ausdehnung von *CD* ist, was sich dadurch erklärt, daß die ganze Erscheinung auch so betrachtet werden kann, als erfolge ein Ausfluß durch eine Art ringförmiger Oeffnung *DF* und *CF'*, d. h. durch einen Querschnitt, der kleiner ist, als der, welcher der Gesammtatmosphäre *LL'* der überhaupt in Betracht kommenden Wassermasse entspricht und wobei die Wirkung des bei *B* gebildeten Staues als accelerirende Kraft auftritt. [1])

Nach dem Passiren der äußeren Kanten *C* und *D* bewirkt die umgebende Flüssigkeit wieder eine Convergenz der Wasserfäden, die sich endlich nach einigen wirbelnden und excentrischen Bewegungen mit der unbegrenzten Wassermasse vereinigen und mit dieser weiter fließen. Nach der Vereinigung der Wasserfäden hinter der gestoßenen Fläche begrenzen dieselben eine Art von vertiefter Pyramide, das sogenannte Kielwasser (poupe fluide), die um so mehr bemerkbar wird, je schneller die flüssige Masse sich überhaupt bewegt. In diesem Raume *E* steht das Wasser niedriger wie an der Vorderfläche von *CD*, wodurch eine Druckverminderung auf die Hinterfläche entsteht, welche dem Drucke auf die Vorderfläche zu Gute kommt. Dubuat hat diesen besonders von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängigen Druck auf die Hinterfläche mit dem Namen Nichtdruck (non-pression) bezeichnet und seine Größe ebenso durch Versuche zu bestimmen gesucht, wie den Druck auf die Vorderfläche. [2]) Aus der Differenz der Drücke auf Vorder- und Hinterfläche besteht aber der Gesammtdruck, welcher auf die Platte vom bewegten Wasser ausgeübt wird, dessen genaue mathematische Bestimmung (trotz allen Bemühungen, insbesondere d'Alembert's [3]), L. Euler's [4]) und neuerdings wieder Poncelet's [5]) bisher unmöglich gewesen ist.

---

1) Der Verfasser ist hier ganz den Ansichten Dubuat's in dessen Principien, Partie III, S. 151 und S. 162 gefolgt.

2) Im Allgemeinen hat sich ergeben, daß diese Drücke auf die verschiedenen Punkte der gestoßenen Fläche verschieden sind, und zwar abnehmend vom Centrum nach den Rändern hin (Princ. Nr. 444 und Nr. 463), während die Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnisse abnehmen (Nr. 438, pag. 153). Tredgold hat statt der Benennung Nichtdruck den Namen Minus-Pressure eingeführt.

3) Essai d'une nouvelle théorie de la resistance des Fluides 1752 und Opuscules mathematiques 1761—80.

4) Petersburger Comment. Jahrg. 1763.

5) Introduction à la mécanique industrielle. Paris 1839, p. 675 (und hiernach Broch's Lehrbuch der Mechanik, §. 301).

Um praktischen Zwecken zu genügen leitet man daher (nach Dubuat) einen betreffenden mathematischen Ausdruck gewöhnlich folgendermaßen ab.

Es sei b die Höhe der Wassersäule, welche zum Messen des mittleren hydrostatischen Druckes auf die Vorderfläche benutzt wird, V die mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers und H die ihr entsprechende Druckhöhe. Nach den Versuchsresultaten lassen sich die hydraulischen Drücke auf die Vorder- und Hinterfläche den Geschwindigkeitshöhen proportional setzen, also überhaupt durch mH und nH darstellen, wenn m und n durch Versuche zu bestimmende Zahlenwerthe sind. Der mittlere Druck auf jede Einheit der Vorderfläche ist daher $b + mH$ und eben dieser Druck auf die Hinterfläche $b - nH$ zu setzen, weshalb der resultirende Druck $(b+mH) - (b-nH) = (m + n) H$ sein wird. Bezeichnet man daher den Inhalt der ebenen Fläche CD, welche zunächst rechtwinklig zur Stromrichtung vorausgesetzt werden mag, mit A und mit γ wiederum die Dichte der unbegrenzten Flüssigkeit, so erhält man den Gesammtdruck auf die feste Fläche oder den Stoß $= P$ des unbegrenzten Wassers zu:

$$(1) \quad P = \gamma \,.\, A\,(m + n)\,\frac{V^2}{2g},$$

oder wenn man $m + n = k$ setzt, auch

$$\text{I.} \quad P = k \,.\, \gamma \,.\, A\,\frac{V^2}{2g}.$$

Zusatz 1. Für sehr kleine ebene Flächen (1 Quadratfuß) und geringe Geschwindigkeiten (nicht über 3 Fuß pr. Secunde) fand Dubuat*) $m = 1{,}186$ und $n = 0{,}670$, also $k = 1{,}856$, ein Werth, der auch mit den Resultaten anderer Experimentatoren**) übereinstimmt, so daß man bis auf Weiteres für sehr kleine ebene Flächen wird setzen können:

$$k = 1{,}86.$$

Zusatz 2. Bewegt sich die gestoßene Fläche mit der Geschwindigkeit v in der Richtung des Wassers oder entgegengesetzt derselben, so hat man in I. analog §. 165, die entsprechende relative Geschwindigkeit, also allgemein $V \mp v$ statt V zu setzen, d. h. es ist

$$P = k \,.\, \gamma \,.\, A\,\frac{(V \mp v)}{2g}.$$

*) Principes, Nr. 482.

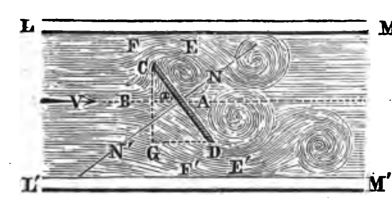
**) Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle, p. 585.

§. 168.

Schiefer Stoß unbegrenzten Wassers gegen ebene Flächen.

Aus dem, was beim schiefen Stoße isolirter Wasserstrahlen bekannt geworden ist, folgt von selbst, daß für unbegrenztes Wasser noch mehr von der Möglichkeit einer mathematischen Theorie wird abgesehen werden müssen, als dies an gedachter Stelle der Fall war. Man begnügt sich daher auch für technische Zwecke mit dem für den Normalstoß N, §. 165, gefundenen Werth: $N = \frac{\gamma A}{g} V^2 \sin\alpha$, führt statt des hier erforderlichen Strahlquerschnittes A die Verticalprojection $\overline{CG} = \overline{CD}.\sin\alpha$ ein, oder wenn die Fläche CD mit F bezeichnet wird, schreibt für A den Werth $F \sin\alpha$ in die aufgeführte Gleichung und corrigirt alle hierbei gemachten Fehler durch Einführung eines besonderen Erfahrungscoefficienten $\frac{k_1}{2}$, so daß endlich erhalten wird

Fig. 201.



$$\text{I.} \quad N = k_1 \frac{\gamma F}{2g} \,.\, V^2 \sin\alpha^2,$$

für den Normalstoß unbegrenzten Wassers gegen eine feste ebene Fläche, welche unter einem Winkel α gegen die Richtung des ankommenden Wassers geneigt ist.

Für Flächen von nicht zu großer Ausdehnung (etwa bis zur Größe der Windflügel der gebräuchlichen Windmühlen) wird man mit Coriolis $k_1 = 3$ *), folglich setzen können:

$$\text{II.} \quad N = 3 \,.\, \frac{\gamma.F}{2g} \,.\, V^2 \sin\alpha^2.$$

Haben die Flächen nur sehr geringe Ausdehnung (1 Quadratfuß und weniger), so giebt letzte Gleichung etwas zu große Werthe. **)

*) Traité de la mécanique etc. Deuxième Partie, pag. 237.

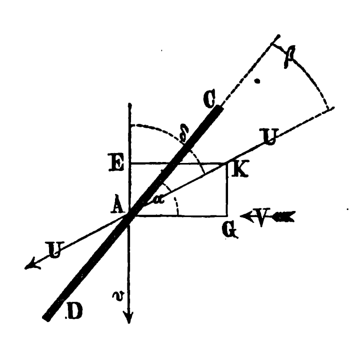
**) Empfehlenswerth scheint Weisbach's Vorschlag (Ing. Mechanik, Bd. 2, S. 492) zu sein, nach Hutton und für Fußmaße zu setzen $k_1 = 1{,}86 \,.\, F^{0{,}1}$, so daß z. B. für $F = 200$ □' (mittlere Größe der gewöhnlichen Windflügel) aus k_1 wird: $k_1 = 1{,}86 \,.\, 200^{0{,}1} = 3{,}162$, was mit der oben bemerkten Zahl von Coriolis gut übereinstimmt.

Anmerkung. So weit zur Zeit die vorhandenen Versuche über die Anwendbarkeit der Formel I. reichen, läßt sich bestimmt annehmen, daß für praktische Zwecke, wenn der Winkel nicht kleiner wie 60 Grad ist, ohne Weiteres von derselben Gebrauch gemacht werden kann, daß aber von 60 Grad abwärts die Anwendbarkeit immer unzulässiger und endlich für Winkel unter 20 Grad eigentlich unbrauchbar wird, wie unter Anderen Coriolis *) und Prechtel **) nachgewiesen haben.

§. 169.

Bewegt sich die schiefe vom unbegrenzten Wasser getroffene Fläche mit einer Geschwindigkeit v in einer Richtung, welche rechtwinklig auf der Geschwindigkeit V, Fig. 202, des Wassers steht, so ermittelt man den Normaldruck gegen die Fläche CD, wenn man in I. des vorigen Paragraphen die entsprechende relative Geschwindigkeit $= U$ statt V einführt. Hierzu denke man sich Wasser und Fläche zu einer gemeinsamen Bewegung entgegengesetzt v angeregt, wodurch an der Wirkungsweise Nichts geändert, für den Rechnungsgang aber der Zustand herbeigeführt wird, als würde die ruhende Fläche vom Wasser mit einer Geschwindigkeit $U = \sqrt{V^2 + v^2}$ getroffen, deren Richtung mit der Fläche einen Winkel $KAC = \beta$ bildet. Es ist daher der Normalstoß N:

Fig. 202.



$$(1)\quad N = k_1 \frac{\gamma}{2g} \cdot F\,(U \cdot \sin\beta)^2.$$

Setzt man ferner $\angle KAE = \delta$, so ist $\delta + \alpha - \beta = 90^0$, also $\cos(90 + \beta) = \cos(\delta + \alpha)$ und daher $\sin\beta = \sin\delta \sin.\alpha - \cos\delta \cos\alpha$, oder wegen $\sin\delta = \frac{V}{U}$, $\cos\delta = \frac{v}{U}$, auch $\sin\beta =$

*) Traité de la mécanique etc., p. 199.

**) Untersuchungen über den Flug der Vögel, Wien 1856, S. 154, wo für kleinere Winkel der Vorschlag gemacht wird $(\alpha + 3\frac{1}{2})^0$ statt α zu etzen.

$\frac{V \sin\alpha}{U} - \frac{v \cos\alpha}{U}$ oder $U \sin\beta = (V \sin\alpha - v \cos\alpha)$, weshalb aus (1) wird:

$$N = k_1 \frac{\gamma}{2g} \cdot F\,(V \sin\alpha - v \cos\alpha)^2.$$

Zusatz. Aus letzterer Gleichung erhält man ohne Weiteres die bereits §. 116 erwähnte Kraft, womit frei strömendes Wasser das Rad eines Woltmann'schen Flügels (§. 115) in der Richtung der ausweichenden Fläche zur Umdrehung veranlaßt, zu

$$p = k_1 \frac{\gamma}{2g} \cdot F\,(V \sin\alpha - v \cos\alpha)^2 \cos\alpha,$$

woraus folgt:

$$V = v \operatorname{cotg}\alpha + \sqrt{\frac{2gp}{k_1 \gamma F . \sin\alpha^2 \cos\alpha}},$$

oder, wenn r den Halbmesser des Stoßmittelpunktes vom Flügel bezeichnet und v gleichzeitig die Peripheriegeschwindigkeit dieses Punktes, endlich in T Secunden, u Umdrehungen erfolgen, ergiebt sich

$$V = \frac{2r\pi}{T} \cdot u \cdot \operatorname{cotg}\alpha + \sqrt{\frac{2gp}{k_1 \gamma . F \sin\alpha^2 \cos\alpha}}.$$

In diesem Ausdrucke kommen unter Voraussetzung ebener Flügelflächen (wie dies bei dem Woltmann'schen Geschwindigkeitsmesser der Fall ist), außer u lauter bekannte Größen vor, so daß man setzen kann, wenn A und B betreffende Coefficienten bezeichnen:

$$V = A + Bu,$$

was genau der auf empirischem Wege, §. 116, abgeleitete Werth ist.

§. 170.

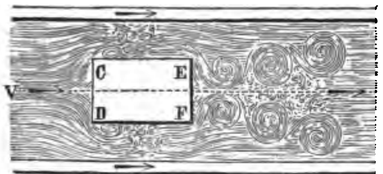
Stoß unbegrenzten Wassers gegen feste Körper.

Werden feste Körper vom bewegten Wasser getroffen, so hängt die Größe des entsprechenden hydraulischen Druckes oder Stoßes von der Ausdehnung, Gestalt, dem Anhängen (der Reibung) der Flüssigkeit an den Begrenzungsflächen etc., überhaupt von so viel Umständen ab, daß man sich hier, mit Ausnahme einiger ganz speciellen Fälle *), ausschließlich mit Ergebnissen aus Versuchen begnügen muß.

*) Beispielsweise folgen [§. 173] im Artikel „Widerstand des Wassers" einige betreffende Rechnungen.

Beispielsweise werde Nachstehendes aufgeführt.

Fig. 203.



Strömt das Wasser gegen feste unbewegliche Prismen *DCEF*, wie Fig. 203, mit ebenen Endflächen, und liegen deren Axen überdies in der Bewegungsrichtung, so läßt sich der bewirkte hydraulische Druck $= P$ immer noch mittelst der Gleichung berechnen

$$P = k \,.\, \gamma \,.\, A \frac{V^2}{2g}.$$

Hierbei ist jedoch k mit der Länge $= L$ des Prismas und mit der Quadratwurzel aus dem Querschnitte $= A$, rechtwinklig zur Länge genommen verschieden. Versuche von Dubuat *) und Duchemin **) geben über letztere Beziehung Auskunft.

Nach Dubuat ist für	$\frac{L}{\sqrt{A}} =$	0,00	1,00	3,00	6,00
	k	1,865	1,451	1,323	1,460
Nach Duchemin für	$\frac{L}{\sqrt{A}}$	0,00	1,00	2,00	3,00
	k	1,864	1,477	1,347	1,328

Die Wirkung unbegrenzten Wassers gegen ruhende feste Körper hat man wenig oder gar nicht direct ermittelt, betrachtet vielmehr diese Wirkung als identisch mit dem Widerstande, welchen unter sonst gleichen Umständen diese Körper erfahren, wenn sie in ruhigem Wasser bewegt werden, wovon im folgenden Kapitel die Rede sein wird.

Beispiel. Ein Steinblock *CDEF*, Fig. 203, von $Q = 2600$ Kil. Gewicht, 1 Meter Länge und 1 Quadratmeter Querschnitt, liegt ganz vom Wasser bedeckt auf dem horizontalen Bette eines Stromes. Es fragt sich, welche Geschwindigkeit das Wasser annehmen kann, ohne diesen Block mit fortzuführen?

*) Principes, Nr. 484, und Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle, Nr. 414.

**) Poncelet: Ebendaselbst p. 594.

Auflösung. Nimmt man den betreffenden Reibungscoefficienten zwischen Stein- und Flußboden $f = 0,75$ an, so wird der Block einen Widerstand $= P$ leisten, welcher ist: $P = 0,75 . 1000 (2,6-1) 1 = 1200$ Kil. Daher, weil $\frac{L}{\sqrt{A}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$ ist und deshalb $k = 1,46$ gesetzt werden kann, folgt:

$$1200 = 1,46 . 1000 . 4 . 0,051 . V^2, \text{ d. i.}$$

$$V = \sqrt{\frac{1200}{297,84}} = 2^m,007.$$

Zweites Kapitel.

Widerstand der Flüssigkeiten gegen bewegte feste Körper.

§. 171.

Im Allgemeinen sind, unter sonst gleichen Umständen, die Erscheinungen des Widerstandes der Flüssigkeiten dieselben wie die des Stoßes, und daher auch die theoretischen Sätze des letzteren auf den Widerstand anwendbar, welchen feste Körper erfahren, wenn sie in Flüssigkeiten (widerstehenden Mitteln) bewegt werden.

Wir unterscheiden im Nachfolgenden, ob die festen Körper im Wasser völlig eingetaucht sind, oder nur zum Theil von diesem umgeben werden.

A. *Völlig eingetauchte feste Körper.*

1. **Widerstand ebener Flächen bei geradliniger Bewegung der letzteren.**

Hier macht man wieder von dem Ausdrucke, §. 167, Gebrauch, d. h. setzt für den fraglichen Widerstand $= P$:

$$P = (m + n) . \gamma A . \frac{V^2}{2g} = k\gamma A \frac{V^2}{2g}.$$

Für kleine Flächen (1 Quadratfuß Querschnitt mit 3 Fuß Geschwindigkeit bewegt) fand Dubuat: $m = 1$ und $n = 0,433$, also $k = 1,433$. Letzterer Werth stimmt auch mit einem Versuchsresultate Pambour's *) überein, während Poncelet **) räth, allgemein $k = 1,30$ zu setzen.

---

*) Gaudry: Traité des machines à vapeur, Paris 1856, T. I, p. 70.
**) Introduction etc., p. 587.

Nach Versuchen von Piobert, Morin und Didion *) mit Flächen von 0,03 bis 0,25 Quadratmeter Inhalt ist für P zu setzen:

$$P = 0{,}934 \,.\, A + 2{,}81 \,.\, \gamma A \frac{V^2}{2g},$$

wenn A und V in Quadratmetern und Metern, und P in Kilogramm ausgedrückt werden.

Mit Vernachlässigung des ersten Gliedes folgt, auf beliebiges Maß bezogen:

$$P = 2{,}81 \,.\, \gamma A \frac{V^2}{2g},$$

wonach $k = 2{,}81$, d. h. doppelt so groß wie bei Dubuat ist; ein Unterschied, der seinen Grund in der Größe der Versuchsfläche hat (Seite 457, zweite Note **).

Nicht unwichtig dürfte die Bemerkung sein, daß im Allgemeinen k größer ist bei geradliniger als (unter sonst gleichen Umständen) bei kreisförmiger Bewegung, so wie daß alle vorbemerkten Resultate eine durchaus gleichförmige Bewegung voraussetzen.

2. **Widerstand rechtwinkliger Prismen.** Werden Prismen wie $CDEF$, Fig. 204, ihrer Längenaxe nach parallel im ruhenden Wasser bewegt, und bezeichnet wiederum L deren Länge und A den Querschnitt normal zu L, so ist mit Bezug auf die Widerstandsformel

Fig. 204.

$$P = k\gamma A \frac{V^2}{2g}:$$

Nach Dubuat wenn	$\frac{L}{\sqrt{A}} =$	0,00	1,00	3,00	
	$k =$	1,433	1,172	1,102	
Nach Duchemin wenn	$\frac{L}{\sqrt{A}} =$	0,00	1,00	2,00	3,00
	$k =$	1,254	1,282	1,300	1,326

*) Poncelet: Introduction à la mécanique industrielle, p. 582.

**) Nach Campaignac (Gaudry a. a. O., p. 70) varirt k bei den Schaufeln der Ruderräder von 1,24 bis 3,90, wofür derselbe 2,76 als Mittelwerth in Rechnung bringt.

Einsichtlich des Einflusses der Länge sind hier die Angaben im Widerspruche. Poncelet räth jedoch, die Schlüsse Duchemin's nicht als entscheidend zu betrachten.

3. **Widerstand von Körpern verschiedener Gestalt.** Aus den Versuchen von Borda und Hutton hat Poncelet *) nachfolgende Zusammenstellung gemacht, wobei die Zahlenwerthe das Verhältniß des Widerstandes der erhabenen Außenseite zu dem Widerstande gegen die Basis angeben. **)

a.	Der dreiseitige Keil mit ebenen Seitenflächen, zu seiner rectangulären Basis, wenn der Winkel an der Spitze ist	90° (Borda) . 0,728 60° „ . 0,520
b.	Dreiseitiger Keil mit Seitenflächen aus Kreisbögen von 60°, diese von den Gegenecken beschrieben, in Bezug auf seine rectanguläre Basis (Borda)	0,390
c.	Halbcylinder, die Grundfläche eine halbe Ellipse, welche um ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben ist, im Verhältniß zum Widerstande gegen seine rectanguläre Basis (Borda)	0,430
d.	Halbcylinder, Halbkreis als Grundfläche in Bezug auf seine rectanguläre Basis (Borda)	0,570
e.	Kegel, die Spitze voraus, im Verhältniß zur kreisförmigen Basis desselben, wenn der Winkel an der Spitze ist	90° (Borda) 0,691 60° „ 0,543 51°24′ (Hutton) 0,433
f.	Halbkugel zur ganzen Kugel (Borda und Hutton)	0,990
g.	Halbkugel zum größten Kreise derselben	Borda . . . 0,405 Hutton . . . 0,413 Vince . . . 0,403 Mittel: 0,407

B. *Zum Theil eingetauchte (schwimmende) Körper.*

Nach den Versuchen von Bossut, d'Alembert und Condorcet ***) scheint bei nicht völlig in das Wasser getauchten Körpern der Widerstand etwas rascher als mit dem Quadrate der Geschwindigkeit zu wachsen, so wie sich ferner ergeben hat, daß unter sonst gleichen Umständen der Widerstand etwas größer ist für einen nahe an der Oberfläche als für einen in gewisser Tiefe schwimmenden Körper.

---

*) Introduction etc., p. 612.

**) Poncelet bedauert hier mit Recht den Mangel der directen Beziehung zum Widerstande der ebenen Fläche von derselben Gestalt und Größe wie die betreffenden Körperbasen. Nimmt man mit Poncelet (a. a. O. p. 587) allgemein 1,3 für die kleine ebene Fläche, so erhält man z. B. für die Kugel $k = 1,3 . 0,407 = 0,5291$, was mit Borda ($k = 0,56$) und Hutton ($k = 0,594$) beinah übereinstimmt.

***) Architecture Hydraulique, par Bélidor, nouvelle Edition (par Navier) pag. 346, Note (*db*) §. 4.

Für die Praxis kann jedoch, wenn A den größten Querschnitt des eingetauchten Theiles vom Körper bezeichnet, der betreffende Widerstand abermals dargestellt werden durch:

$$P = k\gamma A \frac{V^2}{2g}.$$

a. Prismen (gerade) in der Axenrichtung bewegt.

Aus einem Versuche Borda's, welcher eine parallelepipedische Kiste von 14 Zoll Höhe, im ruhigen Wasser rechtwinklig zu einer Seitenfläche so bewegte, daß genau ein Würfel von 1 Fuß Seite in das Wasser tauchte, berechnete Dubuat $k = 1,11$, während er $k = 1,172$ fand, sobald der Körper ganz unter Wasser getaucht war. Ersteren Werth von k räth Poncelet *) zu wählen, sobald die Länge wenigstens das Dreifache der horizontalen Breite ist. Nach d'Aubuisson soll k=1,0 also am kleinsten sein, wenn die Länge des Prismas das fünf- bis sechsfache der Breite (oder vielmehr von $\sqrt{A}$) beträgt.

Vermehrt sich die Länge über letztere Grenze hinaus, so wächst k wieder, was sich durch die vermehrte Reibung (das Anhängen) des Wassers an den Seitenflächen erklären läßt.

b. Prismen mit zugeschärften Vorder- und Hintertheilen.

Wie sehr man den Widerstand schwimmender Prismen vermindert, wenn man die Vorderflächen nach Art mancher Schiffsvordertheile so gestaltet, daß dem Wasser gleichsam eine Schneide zugekehrt wird, lehren unter andern die Versuche, welche hierüber Bossut, d'Alembert und Condorcet anstellten. **) Nimmt man den Widerstand des Prismas ohne Vordertheil als Einheit, so erhält man, je nach den Winkeln des Vordertheiles nachverzeichnete Werthe, vorausgesetzt, daß die Länge des ganzen Körpers das Fünf- bis Sechsfache der Breite ist.

Winkel des Vordertheils	180°	156°	132°	108°	84°	60°	36°	12°
Verhältniß der Widerstände	1,00	0,96	0,85	0,69	0,54	0,44	0,41	0,40

Die am Hintertheile der schwimmenden Prismen angebrachten Zuschärfungen, vermindern zwar, wie man aus folgendem Täfelchen erkennt, ebenfalls den Widerstand, allein bei Weitem weniger wie die am Vordertheile.

Winkel am Hintertheile	180°	96°	48°	24°
Verhältniß der Widerstände	1,00	0,89	0,86	0,84

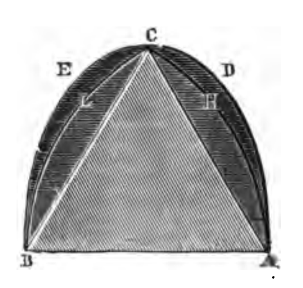
*) Introduction p. 596.

**) Nouvelles expériences, sur la résistance des fluides 1777. Im Auszug d'Aubuisson: Hydraulique, Nr. 264.

Noch mehr wird der Widerstand vermindert, wenn man Vorder- und Hintertheil, so wie endlich den Seitenflächen gekrümmte Formen giebt.

Ein interessanter Versuch von Borda *) giebt hierüber noch weitere Auskunft. Er nahm drei gerade Prismen, wovon das eine von ebenen Seitenflächen BC und AC, Fig. 205, begrenzt war, die mit AB ein gleichseitiges Dreieck ABC bildeten, das andere von Kreisbogen BLC und AHC, die aus A und B beschrieben waren, und endlich das dritte die Halbellipse $BECDA$ zur Außenfläche hatte. Indem er diese Prismen gleichförmig in unbegrenzter Flüssigkeit fortführte, ergab es sich, daß die Widerstände der Bewegung — je nachdem die ebene Fläche AB voranging oder der Winkel C, oder die Spitzen C des Kreiskörpers LCD, oder endlich der Ellipse ECD — sich zu einander verhielten, wie die Zahlen 100 : 52 : 43 : 39.

Fig. 205.



c. Schiffe auf breiten Canälen und Flüssen.

Aus dem Vorstehenden folgt von selbst, daß für Schiffe, je nach der Constructionsform der Vorder- und Hintertheile und besonders der sanften Abrundungen dieser Theile, so wie der Seitenflächen, nicht minder nach dem Verhältnisse der größten Breite zur Länge des Schiffes **), der Widerstandscoefficient k verschieden ausfallen muß, was auch die Erfahrung bestätigt, indem hier k im Allgemeinen von 1,10 bis 0,05 varirt.

In Bezug bestimmter Angaben für k wird man sich daher auf specielle Fälle beschränken müssen.

Nach Poncelet ***) ist für große Moselschiffe, deren allgemeine nicht unvortheilhafte Gestalt, Fig. 206, in Aufriß, Grundriß und Seitenansicht darstellt, $k = 0{,}33$ zu nehmen, so daß man erhält:

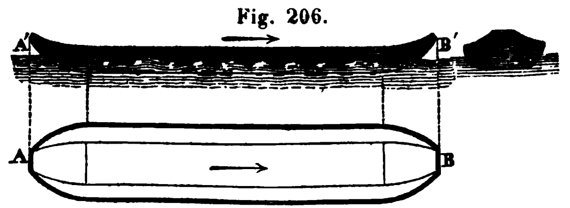
$$\text{I.} \quad P = 0{,}33 \,.\, \frac{\gamma A (V \pm v)^2}{2g},$$

*) Mém. de l'académie etc., 1763, p. 370, und d'Aubuisson Hydraulique, p. 313. Borda's Versuch, zwar in der Luft angestellt, ist von Beaufoy später bestätigt worden, wie man bei d'Aubuisson a. a. O. nachlesen kann.

**) Nach Callon, Mathias und Gaudry (a. a. O., T. II, p. 418) ist das beste Verhältniß der Breite zur Länge wie 1 : 6 bis 1 : 8 bei Seedampfschiffen und 1 : 12 bis 1 : 15 für Flußdampfschiffe.

***) Introduction, p. 609.

Fig. 206.



wenn V die Geschwindigkeit des Schiffes und v die des Flusses bezeichnet.

Nach Versuchen Morin's *) mit dem von Paris nach Meaux gehenden Postschiffen, die aus Eisenblech nach den besten schottischen Canalschiffen construirt sind und wovon Fig. 207 den Aufriß und Fig. 208 die Hälfte des in größerem Maßstabe gezeichneten Grundrisses darstellt (die Hälfte AB das Vordertheil, CD das Hintertheil), ist $k = 0{,}207$ bis $0{,}271$ (je nach der Canalbreite), wofür man als Mittelwerth $0{,}24$ wird annehmen können.

Fig. 207.

Fig. 208.

Bei Schiffsformen wie Fig. 207 und 208 ist daher:

$$\text{II.} \quad P = 0{,}24 \, . \, \frac{\gamma A (V \pm v)^2}{2g}.$$

Für Seedampfschiffe der besseren Gestalt, wie beispielsweise Fig. 35 (Spantenlinien im Aufrisse), Fig. 36 (Wasserlinien) (Seite 70) und Fig. 209 (V Spantenlinien des Vordertheils, H Spantenlinien des Hintertheiles), ist nach Campaignac **) (Mittelwerthe von 12 Dampfschiffen von 12 bis 220 Maschinenpferdekraft) zu setzen beziehungsweise $k = 0{,}108$ bis $0{,}074$. Nach Claudel für neuere amerikanische scharf gebaute Schiffe sogar nur: $k = 0{,}05$.

Fig. 209.

Nach Gaudry für gute Dampfschiffe auf Flüssen und Binnenseen $k = 0{,}118$ bis $0{,}188$. Für sehr lange Flußschiffe will Gaudry gefunden haben, daß k mit der Geschwindigkeit der Bewegung wächst und von $0{,}223$ bis $0{,}565$ (?) variirt.

*) Introduction, p. 609.

**) Gaudry: Traité des machines a vapeur etc. Seconde Partie, p. 451.

Anmerkung. Interessant ist der von Redtenbacher zur Berechnung des Gesammtwiderstandes (Vorder- und Hintertheil, so wie Reibung an den Seitenflächen) eingeschlagene Weg, wobei derselbe zu dem Resultate gelangt, daß der Reibungswiderstand an den Seitenflächen die beiden anderen Widerstände derartig übertreffe, daß man meistentheils letztere gegen den ersteren vernachlässigen könne. Die dabei gewonnenen Zahlenwerthe der Endresultate weichen indeß so sehr von anderen Erfahrungswerthen ab, daß weiter hierauf einzugehen vorerst hier nicht rathsam schien. (Man sehe übrigens Redtenbacher's Werkchen: Die Calorische Maschine, 2. Auflage, Seite 108.)

Zusatz 1. Bei Schiffen, die sich mit großen Geschwindigkeiten über 2,5 bis 2,8 Meter pr. Sec. bewegen, wächst nach den Versuchen von Macneill*) und von Russel**), der Widerstand in größerem Verhältnisse als mit dem Quadrate der relativen oder beziehungsweise absoluten Geschwindigkeit der Bewegung, so daß bei Geschwindigkeiten von 3^m bis $3^m,40$ der Widerstand ungefähr doppelt so groß ist, als nach dem Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit. Bei noch größeren Geschwindigkeiten von $4^m,5$ bis $5^m,0$ vermindert sich dieser Widerstand abermals, etwa bis auf 0,66 desjenigen, welcher dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Zur Aufstellung allgemeiner, namentlich mathematischer Gesetze ist man jedoch nicht gelangt.

Zusatz 2. Bei Schiffen, welche sich auf engen Canälen und Flüssen bewegen und wo das Wasser zu beiden Seiten des Schiffes nicht mit gehöriger Leichtigkeit ausweichen kann, ist nach Dubuat aus Bossut's Versuchen der Widerstand P':

$$\text{V.}\quad P' = \frac{8,46}{2 + \frac{F'}{F}} . P,$$

wenn P den Widerstand im unbegrenzten Wasser, F den Querschnitt des eingetauchten Theiles und F' den Wasserquerschnitt des Canales bezeichnet.

Hierbei wird für $F' = 6,46 . F$ den Werth $P' = P$, woraus folgt, daß wenn der Canalquerschnitt 6,46 mal so groß wie der des Prismas wird, der Widerstand gleich dem im unbegrenzten Wasser ist.

Der Werth V ändert sich nach der Gestalt und Größe der Schiffe, weshalb z. B. d'Aubuisson***) für die auf dem Canale von Languedoc benutzten Barken gefunden hat:

$$P' = 140 \frac{F^2 V^2}{F_1 + 2F} \text{ Kilogr.}$$

Zusatz 3. Eine eben so interessante wie nützliche Anwendung vorstehender Sätze läßt sich auf die bei Dampfschiffen erforderlichen

---

*) Annales des ponts et chaussées, 1834, 3, p. 129.
**) Ebendaselbst, Jahrgang 1837, 3, p. 143.
***) Traité d'Hydraulique, p. 323.

praktischen Rechnungen machen, wovon hier das Wesentlichste mitgetheilt werden soll.

Es bezeichne $A = B \,.\, T$ (Fig. 209) den Inhalt des eingetauchten Theiles vom Hauptspanten des Schiffes, U die relative Geschwindigkeit $V \pm v$ des letzteren gegen das Wasser und C die Umfangsgeschwindigkeit der Ruderräder gegen das Schiff, so wird man für den Bewegungswiderstand $= P$ des Schiffes setzen können

$$(1) \quad P = k \frac{\gamma A}{2g} \,.\, U^2 = k \frac{\gamma A}{2g} \,.\, (V \pm v)^2.$$

Ist ferner a der Inhalt der gleichzeitig eintauchenden Schaufeln der Ruderräder, so hat man ebenso für den Druck $= p$ derselben gegen das Wasser:

$$(2) \quad p = \varkappa \frac{\gamma}{2g} a \, [C - U]^2 = \varkappa \frac{\gamma}{2g} a \, [C - (V \pm v)]^2.$$

Daher ergiebt sich auch die widerstehende Arbeit $= L$ des Schiffes zu:

$$(3) \quad L = k \frac{\gamma A}{2g} U^3,$$

so wie die erforderliche bewegende Arbeit $= L_1$ für die Ruderräder:

$$(4) \quad L_1 = \varkappa \frac{\gamma a}{2g} (C - U)^2 \, C.$$

Für den Beharrungszustand der Bewegung muß (1) gleich (2) sein, d. i.

$$kAU^2 = \varkappa a \, (C - U)^2,$$

woraus folgt:

$$(C - U)^2 = \frac{kAU^2}{\varkappa \,.\, a}, \text{ so wie } \frac{C}{U} = 1 + \sqrt{\frac{kA}{\varkappa a}},$$

und weshalb man aus (4) erhält:

$$L_1 = \frac{\varkappa \gamma a}{2g} \frac{kAU^2}{\varkappa a} \,.\, C = \frac{\gamma k A}{2g} U^3 \left(\frac{C}{U}\right),$$

oder wenn N die Zahl der Total-Pferdekräfte bezeichnet:

$$\text{I.} \quad 75 \,.\, N = \frac{\gamma k A}{2g} U^3 \left(\frac{C}{U}\right).$$

Nach Gaudry*) variirt $\frac{C}{U}$ von 1,35 bis 1,70 und läßt sich als Mittelwerth $\frac{C}{U} = 1{,}5$ setzen.

Noch einfacher ist es, man setzt allgemein:

$$75 \,.\, N = \varepsilon \,.\, A \,.\, U^3,$$

und bestimmt ε für jeden besonderen Fall aus der Gleichung:

$$\varepsilon = k \,.\, \frac{\gamma}{2g} \left(\frac{C}{U}\right) = k \,.\, \frac{\gamma}{2g} \left(1 + \sqrt{\frac{kA}{\varkappa a}}\right).$$

*) a. a. O. pag. 465, Seconde Partie.

Für k und $\varkappa$ finden sich Werthe S. 462 und S. 466.

Beispiel. Welche Nutzarbeit muß die Maschine eines Seedampfschiffes entwickeln, damit in ruhigem Wasser und stiller Luft eine Fahrgeschwindigkeit von 5 Meter pr. Secunde (fast 10 Knoten *) erreicht wird, sobald der Hauptspantenschnitt des eingetauchten Schiffstheiles 21 Quadratmeter beträgt?

Auflösung. Wird nach Seite 446 der Coefficient $k = 0{,}10$ und $\frac{C}{U} = 1{,}50$ gewählt, so ergiebt sich ε (der vorigen Seite) zu:

$$\varepsilon = 0{,}1 \, . \frac{1000}{2 \, . \, 9{,}81} \, . \, 1{,}5 = 7{,}64.$$

Sonach aber:

$$75 \, . \, N = 7{,}64 \, . \, 21 \, . \, (5)^3 \text{ und } N = 267{,}4 \text{ Pferdekräfte.}$$

Werden daher von der Arbeit des Triebapparates (Ruderrad) 65 Procent zur Ueberwindung der Schiffswiderstände übertragen, so ist eine Dampfmaschine erforderlich, deren Nutzarbeit betragen muß:

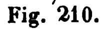
$$\frac{267{,}4}{0{,}65} = 411 \text{ Pferdekräfte.}$$

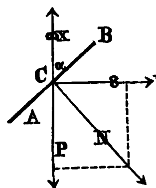
[§. 172.]

Die Schraube als Treibapparat bei Dampfschiffen.

Eine fernere werthvolle Anwendung der Sätze vom schiefen Stoße unbegrenzter Flüssigkeit, §. 169, läßt sich auf die Berechnung der Schraube als Treibapparat der Dampfschiffe machen, wozu wir in der Hauptsache den von Redtenbacher eingeschlagenen Weg verfolgen. **)

Es sei AB, Fig. 210, ein Element (der als eingängig gedachten Schraube) vom Inhalte $= dF$ in der Entfernung $= x$ von der Drehaxe der Schraube und φ der Winkel, welchen die Tangente an die entsprechende Schraubenlinie mit einer auf die Axe der Schraube normal gelegten Ebene bildet. Ferner sei ω die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenbewegung für den Beharrungszustand, endlich u die relative Geschwindigkeit des Schiffes gegen das Wasser.


Fig. 210.



Nach §. 169 erhält man sodann ohne Weiteres für das Differential des Normaldruckes dN gegen das Element dF:

---

*) 1 Knoten $= \frac{1}{120}$ einer Seemeile $= \frac{1852^m}{120} = 15^m{,}4$. Die einem Knoten entsprechende Geschwindigkeit pr. Secunde ist: $0^m{,}5144$.

**) Die calorische Maschine, 2. Auflage, S. 115.

$$dN = k\frac{\gamma}{g}\,dF(x\omega\,.\sin\varphi - u\,.\cos\varphi)^2,$$

so wie das Differential der Kraft S zum Fortbewegen in der Längenaxe des Schiffes

$$(1)\quad dS = dN\,.\cos\varphi = k\frac{\gamma}{g}\,dF(x\omega\,.\sin\varphi - u\cos\varphi)^2\cos.\varphi.$$

Ferner für das Differenzial der Umdrehkraft $= P$ der Schraubenwelle:

$$(2)\quad dP = dN\,.\sin\varphi = k\frac{\gamma}{g}\,dF(x\omega\sin\varphi - u\,.\cos\varphi)^2\sin\varphi.$$

Beachtet man ferner, daß die Bildungsweise der Schraube die Bedingungsgleichung liefert:

$$(3)\quad R\,tg\,\alpha = x\,tg\,\varphi,$$

sobald R den äußeren Halbmesser der Schraube und α den φ correspondirenden Winkel für äußerste Schraubenlinie bezeichnet, so erhält man aus (3):

$$(4)\quad \sin\varphi = \frac{\frac{R}{x}\,tg\,\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2 tg\,\alpha^2}};\quad (5)\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2 tg\,\alpha^2}}.$$

Bezeichnet endlich β den Umdrehungsbogen für ein in der Entfernung $= 1$ von der Axe liegendes Schraubenelement, so folgt:

$$dF = \frac{x\,dx\,.d\beta}{\cos\varphi}.$$

Daher ferner aus (1)

$$dS = k\frac{\gamma}{g}\,\frac{x\,dx\,.d\beta\,(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2}{1+\left(\frac{R}{x}\,tg\,\alpha\right)^2},\ \text{so wie}$$

$$(6)\quad S = k\frac{\gamma}{g}(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{x\,dx\,.d\beta}{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2 tg\,\alpha^2}\,{}^{*)} = k\frac{\gamma}{g}(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2.R^2\pi.f(\alpha$$

wenn $1 + 2\,tg\,\alpha^2\,log.\,nat\,(\sin\alpha) = f(\alpha)$ gesetzt wird.

---

*) Die betreffende Integration bewirkt man leicht folgendermaßen. Man setze $R^2\,tg\,\alpha^2 = m^2$ und $x = my$, so wird, wenn man zugleich nach β integrirt:

$$z = \int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{x\,dx\,.d\beta}{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2 tg\,\alpha^2} = 2\pi m^2\int\frac{y^3dy}{1+y^2} + C =$$

$$2\pi m^2\left[\int y\,dy - \int\frac{y\,dy}{1+y^2}\right] + C.$$

Auf ganz gleichem Wege gelangt man aus (2) zu:

$$dP = k\frac{\gamma}{g}\,x\,dx\,.\,d\beta\,\frac{(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2}{1+\left(\frac{R}{x}\,tg\,\alpha\right)^2}\,.\,tg\,\varphi.$$

Die elementare Arbeit $= dL$ zur Drehung der Schraube um die Axe ist daher:

$$dL = P\,.\,x\omega = k\frac{\gamma}{g}\,x^2dx\,.\,d\beta\,\frac{(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2}{1+\left(\frac{R}{x}\,tg\,\alpha\right)^2}\,.\,\omega\,tg\,\varphi.$$

Hier beachtet, daß $tg\,\varphi = \frac{R\,tg\,\alpha}{x}$ ist, giebt:

$$L = k\frac{\gamma}{g}\,.\,\omega\,(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2\,.\,R\,tg\,\alpha\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{x\,dx\,.\,d\beta}{1+\left(\frac{R}{x}\,tg\,\alpha\right)^2},$$

d. i. wie vorher verfahren:

$$(7)\quad L = k\frac{\gamma}{g}\,.\,R\omega\,(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2\,\pi R^2\,tg\,\alpha\,.\,f(\alpha).$$

Behält man für das Schiff die Bezeichnungen vom Zusatz (3) des vorigen Paragraphen bei, so ist statt (6) zu setzen:

$$(8)\quad mAu^2 = k\,.\,\frac{\gamma}{g}\,(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2\,R^2\pi\,.\,f(\alpha).$$

Hieraus aber

$$(9)\quad \omega R\,tg\,\alpha = u\left\{1+\sqrt{\frac{mA}{k_1R^2\pi}}\,.\,\frac{1}{f(\alpha)}\right\},$$

wenn $k\frac{\gamma}{g} = k_1$ gesetzt wird.

Ebenso folgt aus (7), wenn man für Metermaße $L = 75.N$ einführt, wobei N die Zahl der Maschinenpferde bezeichnet, welche der Totalarbeit entsprechen:

Hieraus folgt aber, wenn man überdies für m seinen Werth wieder einführt:

$$z = \pi\left[x^2 - R^2\,tg\,\alpha^2\,.\,lgnt\left(1+\frac{x^2}{R^2\,tg\,\alpha^2}\right)\right] + C.$$

Endlich mit Beachtung der Grenzen:

$$z_1 = \pi R^2\left[1 - tg\,\alpha^2\,lgnt\,\frac{1}{\sin\alpha^2}\right],\ \text{oder}$$

$$z_1 = \pi R^2\,[1 + 2\,tg\,\alpha^2\,lgnt\,(\sin\alpha)].$$

$$(10)\quad 75\,N = k\,\frac{\gamma}{g}\,R\omega\,(\omega R\,tg\,\alpha - u)^2\,\pi R^2\,tg\,\alpha\,f(\alpha).$$

Daher, wenn mit (8) in (10) dividirt wird:

$$\frac{75\,.\,N}{mAu^3} = R\omega\,.\,tg\,\alpha,\ \text{d. i. wegen (9):}$$

$$\text{I.}\quad 75\,.\,N = mAu^3\left\{1 + \sqrt{\frac{m\,.\,A}{k_1 R^2 \pi}\,\frac{1}{f(\alpha)}}\right\}.$$

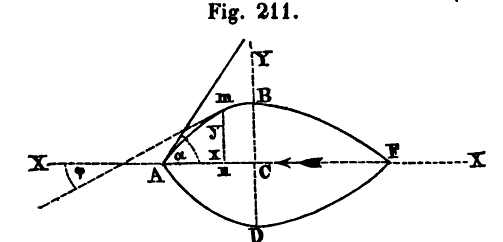
Für Meeresschiffe schlägt Redtenbacher *) vor, $m = 4$, $k_1 = 102$ und $\alpha = 25$ Grad zu nehmen, wenn sich sonst alle Größen auf Metermaß beziehen.

[§. 173.]

Theorie des Widerstandes von krummen convexen Flächen begrenzter Körper, für einige besondere Fälle.**)

Der Vollständigkeit wegen behandeln wir hier einige der wenigen Fälle, wobei die mathematische Theorie (so weit überhaupt hier von einer solchen die Rede sein kann) noch zu Resultaten gelangt, welche mit der Erfahrung übereinstimmen.

Fig. 211.



Hierzu sei AB die Erzeugungslinie einer der convexen krummen Flächen, welche den vordern Theil eines Körpers begrenzt, der sich in ruhendem Wasser nach der durch die Mitte C der Figur gehenden Richtung FA (wie der Pfeil angiebt) bewegt. Ferner sei DB der Durchschnitt der Ebene dieser Erzeugungslinie mit dem größten Querschnitt $= A$ dieses Körpers nach der Bewegungsrichtung, α der Neigungswinkel eines Elementes der Curve bei A gegen die Horizontale XX und φ eben dieser Winkel für ein beliebiges Element bei m, an einem Punkte der Curve AB, dessen rechtwinkligen Coordinaten x und y sind, während sonst die früheren allgemeinen Bezeichnungen beibehalten werden mögen.

Nach Duchemin ***) kann man dann das Differenzial $= dP$ des Druckes auf ein Element m des Vordertheiles darstellen durch:

$$dP = \frac{\gamma k}{\sin\alpha^2}\,\frac{V^2}{2g}\,.\,dA\,.\,\sin\varphi^3,$$

*) Resultate für den Maschinenbau. 3. Auflage, Seite 304.

**) Nach Duchemin's Experimentaluntersuchungen etc. Deutsch von Schnuse, Seite 113.

***) a. a. O. S. 114.

so wie ferner, für Körper von entsprechend geringer Länge, angenommen werden kann, daß das Integral dieses Ausdruckes den Gesammtwiderstand des Körpers darstellt, da (bei kurzen Körpern) das gehörig *) abgerundete Hintertheil von sehr geringem Einfluß ist.

Der Gesammtwiderstand wäre sonach:

$$\text{I.}\quad P = \frac{\gamma k}{\sin\alpha^2} \cdot \frac{V^2}{2g} \int dA \,.\, \sin\varphi^3.$$

1. Ist der bewegte Körper eine Kugel vom Radius $= r$, so wird $\alpha = 90^0$, $r^2 = x^2 + y^2$, $dA = 2\pi y dy$ und $\sin\varphi = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r}$, daher für diesen Fall aus I. wird:

$$P = \gamma k \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{2\pi}{r^3} \int_0^r y dy\, (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{5}\, \gamma k \,.\, r^2\pi \,.\, \frac{V^2}{2g},$$

welcher Werth mit den Versuchen von Borda, Hutton und Vince, §. 171, Seite 463, recht gut übereinstimmt.

2. Für einen Cylinder mit kreisförmiger Basis, welcher sich rechtwinklig zu seiner Axe bewegt, ist $dA = 2l \,.\, dy$, sobald l die Länge des Cylinders bezeichnet, alles Uebrige aber wie vorher, so daß erhalten wird:

$$P = 2k\gamma l \,.\, \frac{V^2}{2g} \int_0^r \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{r^3} \,.\, dy\ {}^{**}) = \gamma k \,.\, \frac{V^2}{2g} \,.\, \tfrac{3}{8}\, r\pi l, \text{ d. i.}$$

wenn $\pi = \frac{22}{7}$ angenommen wird:

$$P = \tfrac{66}{56} \,.\, \gamma k \frac{V^2}{2g} \,.\, rl,$$

oder weil $2rl = A =$ der Fläche des großen Querschnittes ist:

$$P = \tfrac{33}{56} \,.\, \gamma k \,.\, A \frac{V^2}{2g} = 0{,}589 \,.\, \gamma k \,.\, A \,.\, \frac{V^2}{2g}.$$

Nach §. 171, Seite 463, stimmt dies Resultat ebenfalls recht gut mit einem Versuche von Borda, der

---

*) Auch Borda schließt aus seinen Versuchen Mém. de l'Acad. des Sciences 1767, p. 498, daß für kleine Geschwindigkeiten die Vordertheile der Körper allein die Ursache des Widerstandes sind.

Es kann jedoch nicht genug hervorgehoben werden, daß dennoch allgemein der Gesammtwiderstand aus den beiden Widerständen an der Vorder- und Hinterfläche und aus der Reibung an den Seitenwänden des Körpers zusammengesetzt ist.

**) $\int \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy}{r^3} = -\left(\frac{y^3}{4r^3} - \frac{5y}{8r}\right)\sqrt{r^2 - y^2} + \tfrac{3}{8}\, r \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{r}\right).$

$$P = \tfrac{1634}{2864} \, . \, \gamma k \, . \, A \, . \, \frac{V^2}{2g} = 0{,}570 \, . \, \gamma k \, . \, A \, \frac{V^2}{2g} \text{ fand.*)}$$

Für noch andere derartige Rechnungen sind die unten bezeichneten Werke zu empfehlen. **)

Drittes Kapitel.

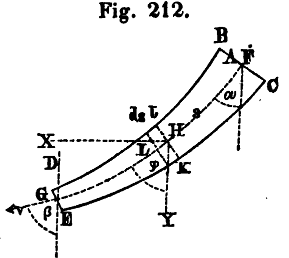
Gesammtausdruck des Wassers gegen die Wände einer engen Röhre, aus welcher es strömt. (Reaction des Wassers.)

[§. 174.]

Bereits früher (§. 69) wurde der Druck des bewegten Wassers auf einen beliebigen Punkt einer Röhre wie hier ermittelt, während jetzt der Gesammtdruck bestimmt werden soll, welchen das Gefäß erfährt, und wodurch zugleich die Kraft bekannt wird, die man von Außen auf das Gefäß wirken lassen müßte, um dasselbe an dem betreffenden Orte des Raumes im Ruhezustande zu erhalten.

Der Einfachheit wegen setzen wir eine beständig voll Wasser erhaltene Röhre BE, Fig. 212, von einfacher Krümmung ohne plötzliche Verengungen oder Erweiterungen voraus, deren Querschnitte bei $BC = A$ u. bei $DE = a$ constant sind, während sich die Querschnitte zwischen beiden Enden beliebig, jedoch in sanften Uebergängen, ändern und allgemein der bei JK mit der veränderlichen Größe $= \omega$ bezeichnet werden mag. Ferner seien die Geschwindigkeiten in den Schichten BC, DE und JK beziehungsweise V, v und u, so wie endlich die Winkel, welche die Tangenten an der Axenlinie der Röhre bei F, H und G mit der Verticale bilden, respective α, β und φ.

Fig. 212.



Für ein Massenelement $= dm$ der Flüssigkeit bei H, wenn man dessen Länge $HL = d\lambda$ annimmt, ergiebt sich, unter Beibehaltung bereits bekannter Bezeichnungen:

$$dm = \frac{\gamma}{g} \, \omega ds.$$

---

*) Expériences sur la résistance des fluides par M. le Chevalier de Borda in den Mémoires de l'Académie des Sciences. Année 1763, p. 367.

**) Duchemin a. a. O., §. 93, §. 98 etc. Scheffler: Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Bd. 2, §. 175.

Die zu ermittelnden Drücke auf die Röhrenwände müssen durch die in den entsprechenden Richtungen verlorenen Kräften dargestellt werden, weshalb man für die Drücke auf die Wandstellen erhält, welche von der Schicht *JKL* berührt werden und die betreffenden Coordinatenaxen bei *H*, nämlich *HX* und *HY* horizontal und vertical vorausgesetzt werden:

$$\text{horizontal} = \frac{\gamma}{g}\,\omega ds\left[\text{Null} - \frac{d^2x}{dt^2}\right],\quad \text{vertical} = \frac{\gamma}{g}\,\omega ds\left[g - \frac{d^2y}{dt^2}\right],$$

so wie für alle Schichten von *BC* bis *JK*, wenn man die Horizontalcomposante des Gesammtdruckes mit X und die Verticalcomposante mit Y und endlich die Integralconstanten mit C und C' bezeichnet:

$$(1)\ X = -\frac{\gamma}{g}\int\left(\omega ds.\frac{d^2x}{dt^2}\right) + C;\quad (2)\ Y = \left[\gamma\int\omega ds - \frac{\gamma}{g}\int\omega ds.\frac{dy^2}{dt^2}\right] + C'.$$

Es ist aber $\frac{\gamma}{g}\int\omega ds$ das Gewicht $= w$ des Wassers in der Röhre von *BC* bis *JK* gerechnet, ferner wegen $u = \frac{av}{\omega}$ und $ds = udt$ auch $\omega ds = \omega udt = avdt$, weshalb aus (1) und (2) nach Einführung dieser Werthe erhalten wird:

$$(3)\ X = -\frac{\gamma}{g}av\int\frac{d^2x}{dt} + C;\quad (4)\ Y = w - \frac{\gamma}{g}av\int\frac{d^2y}{dt} + C'.$$

Es verbleibt jetzt nur noch die Bestimmung von $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$, was jedoch keine Schwierigkeit bietet, indem man ohne Weiteres erhält:

$$\frac{dx}{dt} = u.\sin\varphi = av.\frac{\sin\varphi}{\omega}\quad\text{und}\quad\frac{dy}{dt} = u.\cos\varphi = av.\frac{\cos\varphi}{\omega}.$$

Hieraus aber:

$$\frac{d^2x}{dt} = av.d\left(\frac{\sin\varphi}{\omega}\right)\quad\text{und}\quad\frac{d^2y}{dt} = av.d\left(\frac{\cos\varphi}{\omega}\right).$$

Daher aus (3) und (4):

$$X = -\frac{\gamma}{g}a^2v^2\int d\left(\frac{\sin\varphi}{\omega}\right) + C = -\frac{\gamma}{g}a^2v^2\left(\frac{\sin\varphi}{\omega} - \frac{\sin\alpha}{A}\right)\quad\text{und}$$

$$Y = w - \frac{\gamma}{g}a^2v^2\int d\left(\frac{\cos\varphi}{\omega}\right) + C' = w - \frac{\gamma}{g}a^2v^2\left(\frac{\cos\varphi}{\omega} - \frac{\cos\alpha}{A}\right).$$

Für die ganze Ausdehnung der Röhre von *F* bis *G* ergeben sich daher die Composanten *H* (horizontal) statt *X*, und *S* (senkrecht) statt *Y*, wenn *W* das Totalgewicht des Wassers in der Röhre bezeichnet:

$$\text{I.}\quad H = -\frac{\gamma}{g}a^2v^2\left(\frac{\sin\beta}{a} - \frac{\sin\alpha}{A}\right)\quad\text{und}$$

$$\text{II.}\quad S = W - \frac{\gamma}{g}a^2v^2\left(\frac{\cos\beta}{a} - \frac{\cos\alpha}{A}\right).$$

Wenn die Axenelemente bei F und bei G vertical, also α und β gleich Null sind (oder die Axe des Gefäßes senkrecht ist) erhält man:

$$H = \text{Null und}$$

$$S = W - \frac{\gamma}{g} a^2 v^2 \left(\frac{A-a}{Aa}\right),$$

oder da nach §. 67 $\frac{v^2}{g} = \frac{2A^2 . h}{A^2 - a^2}$ gesetzt werden kann, sobald h die constante Druckhöhe über Mündungsmitte G bezeichnet:

$$\text{III.} \quad H = 0;$$

$$\text{IV.} \quad S = W - \gamma . \frac{2aAh}{A+a}.$$

Im Falle die Mündung a sehr klein ist, kann man statt IV. auch schreiben:

$$S = W - \gamma . 2ah.$$

Hiernach ist also unter allen Umständen der Druck in verticaler Richtung gegen das Gefäß kleiner wie das Gewicht des darin enthaltenen Wassers und im letzteren Falle gerade um so viel kleiner als die Größe des bereits §. 163 II. ermittelten hydraulischen Druckes oder Wasserstoßes beträgt.

Wenn endlich α = Null und $\beta = 90^0$ ist, so folgt aus I. und II.:

$$\text{V.} \quad H = \frac{\gamma}{g} . a . v^2 = - \gamma a . 2h,$$

$$\text{VI.} \quad S = W + \frac{\gamma}{g} \frac{a^2 v^2}{A}.$$

Bei einem Gefäße mit horizontaler Axe der Ausflußmündung ist also der Druck in verticaler Richtung größer wie das Gewicht des darin enthaltenen Wassers.

Der Horizontaldruck aber, gewöhnlich die Reactionskraft oder kurz Reaction der ausströmenden Flüssigkeit genannt, welche sich in einer dem Ausflusse direct entgegengesetzten Richtung äußert, ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche dem Strahlquerschnitt (a) zur Basis und zur Druckhöhe die doppelte Höhe ($2h$) hat, welche der Ausflußgeschwindigkeit entspricht.

Letzterer Satz ist durch vielfache Versuche von D. Bernoulli[1]), Brunnaci[2]), Ewart[3]) und Weisbach[4]) außer allen Zweifel gesetzt. Theorien über die ganze behandelte Frage lieferten namentlich D. Bernoulli, L. Euler, Navier und nach letzterem (allgemein für Röhren von doppelter Krümmung) Scheffler[5]).

1) Hydrodynamica, Sect. XIII, §. 4, p. 280.
2) Memorie della Societa Italiana delle Science, Tom. XVII, parte Mathematica etc. (Verona 1816.)
3) Freiberger Ingenieur. Erster Band, Seite 137.
4) „Versuche über die Leistung eines einfachen Reactionsrades.“ Freiberg 1851, Seite 19, und die „Experimentalhydraulik“. Freiberg 1855, Seite 253.
5) „Die Principien etc.“ Bd. 2. §. 122.

Vierte Abtheilung.

Aërodynamik.

Einleitung.

§. 175.

Uebereinstimmend mit der Hydrodynamik handelt die Aërodynamik von dem Ausflusse elastischer Flüssigkeiten aus Gefäßen, ihrer Bewegung in Röhren und vom Stoße und Widerstande derselben.

Im Wesentlichen unterscheiden sich die betreffenden Gesetze nur durch den Einfluß der beiden characteristischen Eigenschaften der elastischen Flüssigkeiten, nämlich Elasticität (in bemerkbarer Weise) und leichte Ausdehnbarkeit durch die Wärme, die bereits §. 52 erörtert und durch Formeln festgestellt wurden. Eine Ergänzung in letzterer Beziehung werde durch folgendes Verzeichniß specifischer Gewichte und Dichten solcher Flüssigkeiten beigefügt, welche in der technischen Aërodynamik mehr oder weniger von Wichtigkeit sind. *)

Name der Flüssigkeit	Specifisches Gewicht (beobahtet)	Absolutes Gewicht eines Cubikmeters bei 0° C und bei $0^m,76$ Barometerst. $= \gamma_s$ (beobachtet)	Name des Beobachters
Alkoholgas	1,613	2,05602	Gay Lussac
Atmosphärische Luft	1,000	1,293187	Regnault
Chlorgas	2,47	3,17007	Gay Lussac
Kohlensaures Gas .	1,529	1,96663	Regnault
Kohlenwasserstoffgas (Sumpfgas)	0,5576	0,71514	Thomson
Desgl. . . . . . . (Oelbild. Gas)	0,9852	1,2515	Saussure
Steinkohlengas . . (Leuchtgas)	0,320 bis 0,640	0,62073 (Mittelwerth berechnet	**)
Schwefligte Säure .	2,247	2,8659	Berzelius
Schwefelwasserstoff	1,1912	1,52503	Gay Lussac
Stickstoffgas . . .	0,97136	1,25192	Regnault
Wassergas	0,6235	0,80453	Gay Lussac
Wasserstoffgas . .	0,06927	0,08939	Regnault

*) Atomgewichts-Tabellen von Weber. Braunschweig 1852, S. 126.
**) Schubarth: Techn. Chemie, S. 145, Bd. 1, 4. Aufl., Berlin 1851.

In der Folge bezeichnen wir mit γ_1 das Gewicht der Cubikeinheit elastischer Flüssigkeit, mit P_1 den Druck derselben in Kilogramm pr. Quadratmeter und mit b_1 den correspondirenden Barometerstand, erhalten also nach §. 52 und §. 53:

$$\gamma_1 = \gamma_2 \frac{P_1}{10336} \cdot \frac{1}{1+\delta t_1} \text{ und } \gamma_1 = \gamma_2 \frac{b_1}{0,76} \cdot \frac{1}{1+\delta t_1}.$$

Erster Abschnitt.

Ausfluss gasförmiger Flüssigkeiten aus Gefässen.

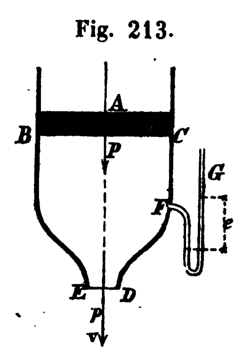
---

§. 176.

Ausflußgeschwindigkeit.

Ist *BCDE*, Fig. 213, ein mit irgend einer elastischen Flüssigkeit gefülltes Gefäß, so wird, wenn die Pressung der Flüssigkeit im Gefäße genau so groß ist, wie die der äußeren Umgebung (in der Regel der atmosphärischen Luft) aus einer Oeffnung *ED* weder innere Flüssigkeit aus noch äußere einströmen. Drückt man jedoch die Flüssigkeit im Innern des Gefäßes mit Hülfe eines gehörig dicht schließenden Kolbens *BC* zusammen, oder beschwert diesen Kolben mit einem Gewichte, dessen Größe pr. Flächeninhalt $= P$ bedeutender ist, wie die eben so geschätzte Pressung $= p$ außerhalb der Mündung *ED*, so wird ein Ausströmen durch eine entsprechend kleine Mündung *ED* mit einer Geschwindigkeit $= v$ erfolgen, die, unter der Voraus-

Fig. 213.



setzung, daß elastische Flüssigkeiten beim Ausflusse aus Gefäßen denselben Gesetzen folgen, wie das Wasser *), nach §. 68 ist:

$$\text{I.} \quad v = \sqrt{2g \frac{(P-p)}{\gamma_1}},$$

sobald γ_1 die Dichte der eingeschlossenen elastischen Flüssigkeit (nach §. 175) bezeichnet, der Querschnitt a der Mündung ED klein gegen den Querschnitt $BC = A$ des Gefäßes $\overline{BD}$ ist und endlich die Größe h als klein genug vernachlässigt wird, welche hier das Gewicht der im Gefäße eingeschlossenen Flüssigkeit repräsentirt.

Wird die Pressung im Innern des Gefäßes durch die Höhe $= e$ eines Quecksilbermanometers FG angegeben, so ist bekanntlich, wenn b den gleichzeitigen Barometerstand bezeichnet:

$$\frac{P}{p} = \frac{b+e}{b}, \text{ also } P - p = \frac{P.e}{b+e},$$

daher aus I. folgt:

$$\text{II.} \quad v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma_1} \cdot \frac{P.e}{b+e}}.$$

Speciell für atmosphärische Luft erhält man daher nach §. 53 für Metermaß:

$$v = \sqrt{2g \,.\, 7992{,}655\ (1 + \delta t) \frac{e}{b+e}}, \text{ d. i.}$$

$$v = 396 \sqrt{(1 + \delta t) \frac{e}{b+e}}.$$

Ebenso für Wasserdämpfe, nach §. 54:

$$v = \sqrt{2g \,.\, 12350\ (1 + \delta_1 t) \frac{e}{b+e}},$$

$$v = 492{,}2 \sqrt{(1 + \delta t) \frac{e}{b+e}}.$$

Anmerkung. Mit Erfolg behandelte zuerst Daniel Bernoulli **) den Ausfluß elastischer Flüssigkeiten. Er setzte dabei die Flüssigkeit im Innern des Gefäßes als ruhend, die Pressungen in der ganzen Ausdehnung des Gefäßes als constant voraus und nahm ferner an, daß die Molecüle, welche die Gefäßmündung durchströmen, eine Geschwindigkeit besitzen, welche dem Ueberschusse der inneren Pressung über der äußeren entsprechend ist, der Ausfluß also überhaupt

*) Poncelet: Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Tome XXI, pag. 4.

**) Hydrodynamica, p. 200 etc.

wie bei nichtzusammendrückbaren Flüssigkeiten erfolge. Demselben Gegenstand widmeten Johann Bernoulli und Euler [1]) ihre Aufmerksamkeit, ferner d'Alembert [2]) und Bossut [3]).

Wesentlich erweitert wurde durch die Arbeit dieser letzteren Männer die fragliche Theorie nicht, vielmehr war dies Navier [4]) aufbewahrt, der seine betreffenden mathematischen Entwickelungen besonders auf die Hypothese stützte, daß elastische Flüssigkeiten während ihres Ausflusses sich ausdehnen und dabei genau dem Mariotte-schen Gesetze folgen. Im nachstehenden Paragraphen haben wir die Navier'sche Theorie (fast wörtlich) aufgenommen, gegen welche neuerdings Poncelet [5]) so erhebliche auf Experimente gestützte Einwendungen gemacht hat, daß wir bis auf Weiteres in allen wesentlichen Auffassungen des Gegenstandes diesem letzteren Mathematiker allein zu folgen für angemessen hielten.

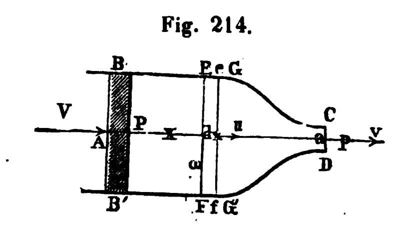
[§. 177.]

Navier's Theorie der Bewegung elastischer Flüssigkeiten.

Außer den in der Anmerkung des vorigen Paragraphen hervorgehobenen Voraussetzungen erweitert Navier zur Begründung seiner Entwickelungen die Hypothese vom Parallelismus der Schichten (§. 66) noch dahin, daß er annimmt, es gehen im Beharrungszustande der Bewegung in derselben Zeit gleiche Massen (Gewichte) durch die verschiedenen Querschnitte eines Gefäßes, ein Satz, der sich durch folgende Gleichungen darstellen läßt:

$$(1)\quad PAV = z\omega u = pav.$$

Fig. 214.



Hierbei haben P, A, V und p, a, v die bisherigen Bedeutungen, während z die veränderliche Pressung in einer beliebigen Schicht EF vom Querschnitte ω bezeichnet, welche von BB' um x absteht und in welcher sämmtliche durchströmende Flüssigkeits-Elemente die Geschwindigkeit $= u$ besitzen. [6])

Der weitere Gang ist dann folgender:

---

1) Karsten: Lehrbegriff der gesammten Mathematik. Theil 6, Seite 302.
2) Traité des Fluides, Liv. II, Chap. IV.
3) Hydrodynamique. Edit. 1794 (l'an IV). T. I. Chap. XI.
4) Annales de Chimie et Physique (avril 1827). T. XXXIV, p. 400, und besonders in den Mémoires de l'académie etc. T. IX. Paris 1830.
5) Comptes rendus. T. XXI, p. 18.
6) In Bezug auf (1) werde noch Folgendes bemerkt. Unter Voraussetzung gleicher Temperaturen lassen sich die betreffenden

Die am Ende einer Zeit $= t$ der beliebigen Elementarschicht $EFef$ inwohnende lebendige Kraft ist: $\frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{g}\omega dx \,.\, u^2$, daher der Zuwachs an lebendiger Kraft derselben Schicht während eines unendlich kleinen Zeittheilchen dt: $\frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{g}\omega dx \,.\, 2udu$ und eben dieser Zuwachs für die ganze Flüssigkeit im Gefäße, während desselben Zeittheilchens:

$$(2) \quad \int \frac{\gamma_1}{g}\omega dx \,.\, 2udu + \text{Const.}$$

Andererseits ist die Schicht Ef, zufolge der gegenseitigen Wirkung der Schichten auf einander, der Kraft ωdz unterworfen, welche im entgegengesetzten Sinne der Bewegung thätig und deren durchlaufener Weg in der Zeit dt gleich udt ist.

Die Summe der allen Schichten der Flüssigkeit eingeprägten mechanischen Arbeiten beträgt daher:

$$(3) \quad -\int \omega dz \,.\, udt + \text{Const.}$$

Beide Integrale (2) und (3) zwischen denselben Grenzen genommen, erhält man nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte:

$$-\int \omega dz \,.\, udt = \frac{1}{2}\int \frac{\gamma_1}{g}\omega dx \,.\, 2udu,$$

oder, wenn man udt an die Stelle von dx setzt, sodann dt wie einen constanten, allen Gliedern gemeinsamen Factor entfernt und endlich $\gamma_1 = \frac{z}{k}$ nach §. 53 einführt:

$$(4) \quad -gk\int \omega dz \,.\, u = \int z\omega^2 u^2 du.$$

Zufolge (1) ist nun $u = \frac{pav}{z\omega}$, also $du = -pav\frac{d(z\omega)}{(z\omega)^2}$, daher nach Einführung dieser Werthe in (4):

$$-gk \,.\, pav\int_P^p \frac{dz}{z} = -(pav)^3\int_{PA}^{pa}\frac{d(z\omega)}{(z\omega)^3}, \text{ d. i.}$$

$$gk\, lgnt\frac{p}{P} = \frac{(pav)^2}{2}\left[\frac{1}{(PA)^2} - \frac{1}{(pa)^2}\right], \text{ oder}$$

Dichten nach §. 175, wenn m eine entsprechende constante Zahl bezeichnet, darstellen durch $\gamma_2\frac{P}{m}$ für die Schicht BB', $\gamma_2\frac{z}{m}$ für die Schicht EF und endlich durch $\gamma_2\frac{p}{m}$ für die Schicht CD, daher ohne Weiteres folgt:

$$\gamma_2\frac{P}{m}\,.\,AV = \gamma_2\frac{z}{m}\omega\,.\,u = \gamma_2\frac{p}{m}\,.\,a\,.\,v.$$

$$2gk\,lgnt.\frac{P}{p} = v^2\left[1-\left(\frac{pa}{PA}\right)^2\right], \text{ folglich:}$$

$$\text{I.}\quad v = \sqrt{\frac{2gk.\,lgnt.\frac{P}{p}}{1-\left(\frac{pa}{PA}\right)^2}}.$$

Ist endlich a im Verhältniß zu A recht klein und führt man wiederum $\gamma_1 = \frac{P}{k}$ ein, so läßt sich setzen:

$$\text{II.}\quad v = \sqrt{2g\frac{P}{\gamma_1}lgnt.\frac{P}{p}}.$$

Für verhältnißmäßig geringe Pressungsdifferenzen endlich:

$$v = \sqrt{2g\frac{P}{\gamma_1}.\frac{P-p}{p}}.$$

Hebt man hier P im Zähler gegen p im Nenner auf, so erhält man die bereits §. 176 unter der Voraussetzung der Nichtzusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten abgeleitete Formel.

Zusatz. Von Navier's Principien ausgehend, jedoch mit Zuziehung einer abgeänderten Pambour'schen Gleichung $\gamma_1 = \alpha + \beta z$ für die Dichte des gesättigten Wasserdampfes von der Pressung $= z$ in Kilogr. pr. Quadratmeter, wo α und β die unten angegebenen Coefficienten bezeichnen, entwickelt Redtenbacher *) die Ausflußgeschwindigkeit des Wasserdampfes folgendermaßen: Er setzt nach dem Satze (III, S. 38 Geodynamik), daß

$$\text{Acceleration} = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Gewicht der bewegten Masse}} \text{ ist,}$$

wenn die vorigen Bezeichnungen beibehalten werden:

$$\frac{udu}{dx} = g\,.\,\frac{-Adz}{A(\alpha+\beta z)\,dx}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\int_0^v udu = -g\int_P^p \frac{dz}{\alpha+\beta z}, \text{ oder}$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{\beta}\,lgnt\,\frac{\alpha+\beta p}{\alpha+\beta P}, \text{ d. i.}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\beta}\,lgnt\,\frac{\alpha+\beta P}{\alpha+\beta p}}.$$

*) Die Gesetze des Locomotivenbaues, Seite 34.

Werthe von α und β für Metermaß.

Für Dämpfe von 1 bis 2 Atm. Spannkraft:	Für Dämpfe von 2 bis 5 Atm. Spannkraft:
$\alpha = 0{,}06295$	$\alpha = 0{,}1427$
$\beta = 0{,}000051$	$\beta = 0{,}0000473$
$\frac{\alpha}{\beta} = 1234$	$\frac{\alpha}{\beta} = 3017.$

Für Wasserdämpfe von erheblicher Spannung dürfte dieser Ausdruck so lange jenem in §. 176 vorzuziehen sein, so lange die Poncelet'schen Voraussetzungen nicht auch für diese Flüssigkeit durch besondere Versuche erwiesen sind.

§. 178.

Ausflußmenge elastischer Flüssigkeiten.

Nach Ermittelung der Ausflußgeschwindigkeit mit Hülfe der vorigen Paragraphen erhält man ganz so wie §. 71 bei den unelastischen Flüssigkeiten das pr. Secunde unter constantem Drucke ausströmende Quantum $= Q$, wenn auch hier μ den Ausflußcoefficienten bezeichnet:

$$\text{I.} \quad Q = \mu a v,$$

die unter dem inneren Drucke gemessene Ausflußmenge.

Die Menge von Flüssigkeit, welche, sonst gleiche Umstände vorausgesetzt, unter dem äußeren Drucke gemessen ausströmt, oder das auf den äußeren Luftdruck reducirte Flüssigkeitsquantum $= Q'$, wegen

$$Q : Q' = p : P \text{ zu:}$$

$$\text{II.} \quad Q' = \frac{P}{p} \cdot Q = \mu a v \frac{P}{p}.$$

Die Ausflußcoefficienten sind, bis auf Weiteres, ganz den betreffenden Tabellen für unelastische Flüssigkeiten zu entlehnen. *)

---

*) Die erheblichen Abweichungen der aus directen Versuchen gewonnenen Ausflußcoefficienten für elastische Flüssigkeiten bestimmen zur Zeit diesen Schluß.

	So fand		
	d'Aubuisson	Buff	Weisbach aus Koch's Versuchen
Für die dünne Wand	$\mu = 0,65$	$\mu = 0,50$ bis $0,60$	$\mu = 0,57$ bis $0,62$
Für kurze cylindrische Ansätze	$\mu = 0,93$	$\mu = 0,72$ „ $0,74$	$\mu = 0,76$ „ $0,76$
Für kurze conische Ansatzröhre von 5 bis 15 Grad Convergenzwinkel . . .	$\mu = 0,94$	$\mu = 0,73$ „ $0,85$	$\mu = 0,85$ „ $0,89$

Beispiel. Aus einem mit Steinkohlengas gefüllten Gasometer sollen für Beleuchtungszwecke pr. Stunde 1000 Cubikmeter Gas unter einem constanten Drucke von 0,045 Meter Wassermanometerhöhe aus einer in dünner Wand zu bildenden kreisförmigen Oeffnung abgeführt werden, wenn die Temperatur des Gases 15° *C* und der äußere Barometerstand $0^m,755$ ist. Es fragt sich, welchen Durchmesser die Ausflußöffnung erhalten muß?

Auflösung. Wird das specifische Gewicht des Steinkohlengases zu 0,556 angenommen, so erhält man zuerst für das Gewicht der Cubikeinheit $= \gamma_1$ dieses Gases: $\gamma_1 = \frac{0,719 \, . \, P}{10336\,(1 + \delta t)}$.

Ferner folgt, wenn man die Wassermanometerhöhe auf die einer Quecksilbersäule reducirt, der betreffende Manometerstand

$$e = \frac{0,045}{13,6} = 0^m,00331, \text{ also } b + e = 0,755 + 0,00331 = 0^m,75831.$$

Daher wegen $v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma_1}(P - p)}$, hier

$$v = \sqrt{2g \, . \, \frac{10336\,(1 + \delta t)}{0,719} \, \frac{P - p}{P}}, \text{ oder}$$

weil $\frac{P - p}{P} = \frac{e}{b + e}$ ist:

$$v = 4,429 \sqrt{\frac{10336\,(1,055)}{0,719} \, . \, \frac{0,00331}{0,7583}}, \text{ woraus}$$

$$v = 36^m,02.$$

Der Mündungsdurchmesser $= \delta$, da die pr. Secunde ausfließende Gasmenge $= Q = \frac{1000}{3600}$ sein soll, berechnet sich hiernach zu

$$\delta = \sqrt{\frac{Q}{0,785 \, . \, \mu \, . \, v}} = \sqrt{\frac{1000}{3600} \, \frac{1}{0,62 \, . \, 0,785 \, . \, 36,02}} = 0^m,1256,$$

sobald der Ausflußcoefficient $\mu = 0,62$ angenommen wird.

Zweiter Abschnitt.

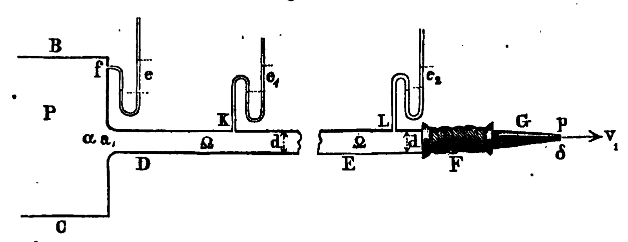
Bewegung elastischer Flüssigkeiten in Röhren.

---

§. 179.

Den Poncelet'schen Annahmen folgend, daß sich elastische Flüssigkeiten in Röhren nach denselben Gesetzen wie Wasser

Fig. 215.



bewegen, erhält man die betreffende Bewegungsgleichung unmittelbar aus §. 149, 152 und 153, mit Bezug auf die Bezeichnungen von Fig. 215, sobald v die Geschwindigkeit in der Röhre vom Querschnitt Ω und dem Durchmesser d bezeichnet, δ aber der Durchmesser der Mündung vom Inhalte $= \omega$ ist, zu:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\mu\omega}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\alpha a_1} - 1\right)^2\right] = g.m \frac{P-p}{\gamma_1} - m\frac{4l}{d}(\alpha_1 v + \beta_1 v^2).$$

Es werde nun dieser Ausdruck durch $\frac{1}{2} m$ dividirt, $a_1 = \Omega$ angenommen, α_1 vernachlässigt und statt der Querschnitte Ω und ω beziehungsweise die Durchmesser d (der Röhre) und δ (der äußersten Mündung) eingeführt, also $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{d^2}{\delta^2}$ gesetzt. Sodann folgt:

$$v^2\left[\frac{d^4}{\mu^2\delta^4} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right] = 2g\frac{P-p}{\gamma_1} - 8\beta_1 \,.\, \frac{l}{d} v^2,$$

oder wenn v durch die Ausflußgeschwindigkeit $= V_1$ an der Mündung G, Fig. 215, ersetzt wird, wegen $\mu\delta^2 V_1 = d^2.v$:

$$\frac{\mu^2\delta^4}{d^4} \,.\, V_1^2 \left\{\frac{d^4}{\mu^2\delta^4} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right\} = 2g\frac{P-p}{\gamma_1} - 8\beta_1\mu^2 . \frac{l\delta^4}{d^5} . V_1^2, \text{ d. i.}$$

$$(1) \quad V_1^2\left\{1 + \mu^2\left[\frac{\delta^4}{d^4}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 8\beta_1\frac{l\delta^4}{d^5}\right]\right\} = 2g\frac{P-p}{\gamma_1} \text{ und}$$

$$\text{I.} \quad V_1 = \sqrt{\frac{2g\frac{P-p}{\gamma_1}}{1 + \mu^2\left[\frac{\delta^4}{d^4}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 8\beta_1\frac{l\delta^4}{d^5}\right]}}.$$

Ist P' die Pressung, welche an einem Punkte K der Leitungsröhre beobachtet wurde, die von der Mündung oder Austrittsöffnung bei G um $KG = \lambda$ entfernt ist, so erhält man auf gleichem Wege:

$$\text{II.}\quad V_1 = \sqrt{\frac{2g\,\frac{P'-p}{\gamma_1}}{1+8\beta_1\mu^2\frac{\lambda\delta^4}{d^5}}}.$$

Zur Bestimmung der Pressung P', welche bei K in einer Entfernung λ von der Mündung G statt hat, folgt endlich noch aus I. und II.:

$$\text{III.}\quad \frac{P'-p}{P-p} = \frac{1+8\beta_1\mu^2\frac{\lambda\delta^4}{d^5}}{1+\mu^2\frac{\delta^4}{d^4}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\frac{8\beta_1 l}{d}\right]}.$$

Das pr. Secunde ausströmende Quantum $= Q$ elastischer Flüssigkeit erhält man wieder zu:

$$\text{IV.}\quad Q = \mu_1\,\frac{\delta^2\pi}{4}\,.\,V_1.$$

Zusatz 1. Nach Versuchen von Girard und Anderen setzen wir mit Poncelet *)

$$\beta = 0{,}00315,$$

was nach ähnlicher Auffassung, wie Seite 398 bei den Wasserleitungsröhren einem Widerstandscoefficienten η entspricht:

$$\eta = 8\,.\,\beta = 0{,}0252.$$

Um letzteren Werth leicht im Gedächtniß behalten zu können, wird rathsam sein zu setzen:

$$\eta = \tfrac{1}{40},$$

wonach sich die, bei der Bewegung einer elastischen Flüssigkeit in einer cylindrischen Röhre von l Länge und bei d Durchmesser des kreisförmigen Querschnittes, verloren gehende Druckhöhe $= h$ ausdrücken läßt durch:

$$h = \tfrac{1}{40}\,.\,\frac{l}{d}\,.\,\frac{v^2}{2g}.\ {}^{**})$$

---

*) Cours de mécanique appliquée aux machines, Sect. VI, Nr. 41.

**) Es dürfte bemerkenswerth sein, daß wir S. 398 für den Fall, daß sich Wasser in der Röhre bewegt, unter sonst gleichen Umständen, für diesen Verlust fanden:

$$h = \tfrac{1}{38}\,.\,\frac{l}{d}\,.\,\frac{v^2}{2g}.$$

Zusatz 2. Bei manchen praktischen Rechnungen, z. B. bei Gebläsen, macht man von d'Aubuisson's *) Formel

$$e - e_m = n \cdot \frac{el\delta^4}{d^5}$$

nützliche Anwendung, worin e die Manometerhöhe bei f, Fig. 215, am Anfange einer Röhrenleitung vom Durchmesser d und der Länge l und e_m die Manometerhöhe am Ende der Leitung an der Mündung vom Durchmesser δ bezeichnet, endlich n ein Erfahrungscoefficient ist.

Letzteren bestimmte d'Aubuisson aus sorgfältigen bei Gebläsmaschinen (Ventilatoren) angestellten Versuchen (Röhren von $0^m,0235$ bis $0^m,10$ Durchmesser bei Düsenmündungen von $0^m,02$ bis $0^m,05$ Weite) für Metermaß zu

$$n = 0,0238,$$

so daß überhaupt folgt:

$$e = e_m \left(1 + 0,0238 \frac{l\delta^4}{d^5}\right).$$

Beispiel. An dem Regulator eines Gebläses steht das Quecksilbermanometer auf $0^m,08$, während der äußere Barometerstand $0^m,73$ und die Temperatur 10° C. ist. Vermittelst dieses Gebläses wird Wind durch eine 70 Meter lange und 0,18 Meter weite Röhre in die Nähe eines Schmelzofens geführt und dort durch eine Düse mit einer 0,045 Meter weiten kreisförmigen Mündung in den Schmelzraum geblasen. Es fragt sich, wie groß das unter diesen Umständen gelieferte Windquantum ist, wenn der Contractionscoefficient für den Eintritt $\alpha = 0,75$ und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,86$ angenommen wird. **)

---

*) Traité d'hydraulique, p. 274.

**) Gegenwärtiges Beispiel ist als Vergleichsmittel absichtlich der Maschinenencyclopädie (Artikel Ausfluß) entlehnt, woselbst Weisbach nach Navier-Combes'schen Principien für Q, in selbstständiger Weise, die Gleichung entwickelt:

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2gk \, lgnt\left(\frac{P}{p}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)\frac{1}{d^4} + \frac{1}{\mu^2\delta^4} + 2g\frac{Bl}{d^5}}},$$

worin $k = 7953,2\,(1 + 0,00364 \, . \, t)$ und $B = 0,0015$ ist und nach Substitution obiger Zahlenwerthe sich berechnet:

$$60\,Q = 10,464 \text{ Cubikmeter.}$$

Auflösung. In Bezug auf I:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{P-p}{\gamma_1}\right)}{1+\mu^2\left[\frac{\delta^4}{d^4}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+8\beta_1\frac{l\delta^4}{d^5}\right]}}$$ ist hier

$$\gamma_1 = 1{,}2932\,\frac{0{,}73+0{,}08}{0{,}76}\cdot\frac{1}{1{,}0367},$$

so wie $P-p = 10336\,.\,\frac{8}{76}$ und $\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 = \left(\frac{4}{3}-1\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Daher

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\,.\,9{,}808\,.\,\frac{8}{81}\,.\,\frac{1{,}0367}{1{,}2932}\,.\,10336}{1+(0{,}86)^2\left[\left(\frac{0{,}045}{0{,}18}\right)^4.\frac{1}{9}+8\,.\,0{,}00315\,\frac{70\,.\,(0{,}045)^4}{(0{,}18)^5}\right]}}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{16054{,}4}{1{,}028436}}$$

$$V_1 = 124^m{,}942.$$

Ferner

$$Q = \frac{\mu\delta^2\pi}{4}\,.\,V_1 = 0{,}86\,.\,\frac{(0{,}045)^2}{4}\,.\,\pi\,.\,124{,}942,$$

$$Q = 0{,}170892 \text{ Cub. Meter pr. Secunde,}$$

oder

$$60\,.\,Q = 10^{cm}{,}26 \text{ pr. Minute,}$$

das unter dem **innern Drucke** gemessene Luftquantum.

Reducirt man letzteres auf $0^m{,}76$ Barometerstand und auf 0^0 Temperatur, so folgt

$$Q' = \frac{60\,.\,Q}{1{,}0367}\,.\,\frac{81}{76} = 10{,}26\,.\,\frac{81}{76}\,.\,\frac{1}{1{,}0367} = 1{,}02806\,.\,10{,}26,$$

$$.\,Q' = 10{,}548 \text{ Cub. Meter pr. Minute,}$$

als die auf 0 reducirte Luftmenge unter dem äußeren Drucke gemessen.

Anmerkung. Außer den bereits mehrfach citirten Arbeiten und Werken d'Aubuisson's, Poncelet's und Weisbach's, über Theorie der Bewegung elastischer Flüssigkeiten und Versuche über den Ausfluß derselben, sind zum Studium besonders noch zu empfehlen:

Combes: Ueber die Bewegung der Luft in Röhren. Annales des Mines, Tome XII, 1837, p. 373 (eine im Geiste Navier's gehaltene vortreffliche Arbeit).

Koch: Versuche und Beobachtungen über die Geschwindigkeit und die Quantität verdichteter atmosphärischer Luft etc. Studien des Göttingischen Vereins bergmännischer Freunde. 1. Bd., S. 1.

Buff: Neue Berechnung der Versuche von Koch über das Ausströmen verdichteter Luft aus Oeffnungen von verschiedener Gestalt. Poppend. Annalen der Physik. Bd. 37, S. 1836, S. 277.

Buff: Versuche über den Widerstand ausströmender Luft bei Oeffnungen in dünnen Wänden und kurzen cylindrischen Ansätzen. Ebendaselbst. Bd. 40, 1837, S. 14.

Poncelet: Note sur les experiences de Mr. Pecqueur, relatives à l'écoulement de l'air dans les tubes etc. Comptes rendus, tome XXI, pag 1 (séance du 21 juillet 1845).

Dritter Abschnitt.

Stoss und Widerstand elastischer Flüssigkeiten.

---

§. 180.

Im Allgemeinen sind, bei nicht zu großen Geschwindigkeiten (von 10 Meter pr. Secunde abwärts), die zur Zeit gewonnenen Resultate über Stoß und Widerstand elastischer Flüssigkeiten mit jenen übereinstimmend, welche in der Hydrodynamik für Wasser etc. aufgeführt wurden.

Deshalb kann man auch (innerhalb gedachter Grenzen) den geraden Stoß elastischer Flüssigkeiten gegen feste Körper, wie den Gesammtwiderstand, welchen feste Körper erfahren, die sich in bemerkten Flüssigkeiten bewegen, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, darstellen durch:

$$\text{I.} \quad P = W = k\gamma_1 A \frac{(V \pm v)^2}{2g}.$$

Hierbei ist k verschieden, je nachdem Stoß oder Widerstand in Frage kommt, ferner mit der Größe und Gestalt der betreffenden Körper und bedarf auch hier (streng genommen) in jedem besonderen Falle einer speciellen Bestimmung.

Von den in letzterer Beziehung gewonnenen Versuchsresultaten werden hier nur einige derjenigen aufgeführt, welche hauptsächlich für Bau- oder Maschinentechniker von Wichtigkeit sind, in Bezug auf andere, so wie auf Ausführliches den ganzen

Gegenstand Betreffendes, muß auf die unten citirten Werke verwiesen werden. *)

Für ebene Flächen hat man Stoß und Widerstand der Luft (ähnlich wie schon beim Wasser bemerkt wurde), auch bei Geschwindigkeiten unter 10 Meter pr. Sec., in etwas größerem Verhältnisse als mit der einfachen Fläche wachsend gefunden. D'Aubuisson setzt deshalb, besonders auf Versuche Borda's gestützt, für Metermaß:

$$\text{II.} \quad P = W = 0{,}11 \cdot \gamma_1 A^{1,1} \cdot V^2 \text{ Kilogramm,}$$

wobei, in Bezug auf I., der Coefficient $k = 2{,}158$ ist.

Noch rathsamer dürfte es sein, mit Poncelet für bewegte Flüssigkeit und für 1 Quadratfuß Fläche $= 0{,}1055107$ Quadratmeter, den Coefficienten $k = 1{,}85$, und für ruhende Flüssigkeit $k = 1{,}30$ in Rechnung zu bringen, so daß man für eine beliebig große Fläche $= A$ erhält, wenn diese in Quadratmetern ausgedrückt wird:

$$k = 1{,}85 \cdot A^{-0,1} = 2{,}316 \text{ für bewegte Flüssigkeiten,}$$

$$k = 1{,}30 \cdot A^{-0,1} = 1{,}628 \text{ „ ruhende „}$$

oder es ist mit Bezug auf I:

$$\text{III. Der Stoß: } P = 2{,}316\,\gamma \cdot A^{1,1} \frac{(V \pm v)^2}{2g},$$

$$\text{IV. Der Widerstand: } W = 1{,}628 \cdot \gamma_1 A^{1,1} \frac{(V \pm v)^2}{2g}.$$

Mit Hülfe von II. berechnete d'Aubuisson die unten ange-

---

*) Poncelet: Principes et faits généraux concernant la résistance des milieux, Nr. 372 etc. der Introduction à la mécanique indust.

Duchemin: Experimentaluntersuchungen u. s. w. Cap. IX, S. 138 etc. Ferner

Didion: Traité de ballistique, Paris 1848, Nr. 44 (Lois de la résistance de l'air à de grandes vitesses etc.).

Otto: Hülfsmittel für ballistische Rechnungen, Berlin 1855, Nr. 15 (Luftwiderstand).

**) Traité d'hydraulique, Sec. edit. pag. 615.

gebene Tabelle *), wobei $\gamma_1 = 1{,}231$ Kilogramm, der Barometerstand $b = 0^m{,}755$ und die Temperatur $t = 12^0\ C$ vorausgesetzt ist.

Zusatz 1. Für den Widerstand $= W$ von Vertical-Rädern mit Schaufeln (wie die Wasserräder) versehen, welche sich in ruhiger Luft bewegen, setzt Poncelet (Introduction, Nr. 404) (Meter und Kilogramme):

$$W = 0{,}10 + (0{,}0068 + 0{,}1179 \cdot n \cdot a)\, V^2,$$

wo a die Fläche einer der vorhandenen n Schaufeln bezeichnet.

Für den Luftwiderstand der Wasserräder kann man hiernach als genau setzen:

$$W = 0{,}118 \cdot naV^2,$$

so wie für den entsprechenden Arbeitsverlust $= L$ pr. Secunde

$$L = 0{,}118 \cdot naV^3 \text{ Meter Kilogr.}$$

*)

Benennung des Windes	Geschwindigkeit pr. Secunde in Metern	Druck auf 1 □ Meter ebene Fläche in Kilogramm
Kaum merkbar	1,0	0,13
Gelinder Wind	2,0	0,54
FrischerWind(Brise), Schiffssegel gut spannend . .	6,0	4,87
Bester Windmühlen - Wind	7,0	6,46
Sehr frischer Wind (sehr gut für Meeresfahrt) . . .	9,0	10,97
Fast stürmisch (die größten Schiffssegel spannend) .	12,0	19,50
Stürmisch	15,0	30,47
Orkan	20,0	54,16

d'Aubuisson (a. a. O. p. 618) erwähnt, daß man an einigen Orten Orkane kenne, deren Geschwindigkeit 40 bis 50 Meter betrage und welche sonst feste Gebäude umzuwerfen vermögen.

Richard berichtet (Aide Mémoire, p. 1514), daß Fresnel bei der Beurtheilung der Stabilität der Leuchthürme pr. Quadratmeter 275 Kil. (also das 5fache des Werthes für Orkane) in Rechnung gebracht habe, was vielleicht (?) nach den Bidone'schen Beobachtungen der sogenannten ersten Stöße, Seite 458, erklärt werden könnte.

Zusatz 2. Den Widerstand, welchen ein in ruhiger atmosphärischer Luft mit der Geschwindigkeit $= V$ in englischen Meilen pr. Secunde fahrender Eisenbahnzug allein durch die vorhandene Luft erfährt, ist nach Pambour *) in englischen Pfunden ausgedrückt:

$$W = 0{,}002687 \,.\, A \,.\, V^2,$$

worin $A = 74$ Quadratfuß $+$ 10 Quadratfuß mal Zahl der vorhandenen Wagen mit Einschluß von Tender und Maschine ist.

Redtenbacher **) setzt für Meter und Kilogramme:

$$W = 0{,}0704\,(F + \tfrac{1}{4} i \,.\, f)\, V^2,$$

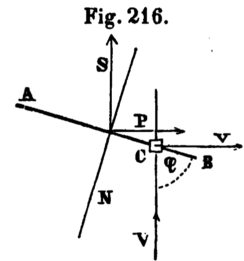
wo F die Stirnfläche der Locomotive in Quadratmeter (gewöhnlich 7□m bis 8□m), f die Stirnfläche jedes Bahnwagens (meistens 4 □Meter), i die Anzahl der von der Locomotive fortzuschaffenden Wagen bezeichnet und endlich V die Fahrgeschwindigkeit in Metern pr. Sec. ist.

[§. 181.]

Stoß des Windes gegen die doppelt gekrümmte Fläche eines Windrades.

Eine werthvolle Anwendung von den Sätzen §. 169 über den schiefen Stoß unbegrenzten Wassers, die ohne Weiteres auch für elastische Flüssigkeiten anwendbar sind, läßt sich auf die Beantwortung der Frage nach der vortheilhaftesten Anordnung der Sprossen eines sogenannten Windrades und der Bestimmung der Arbeit machen, welche der Wind auf ein derartiges Rad überträgt.

Fig. 216.



Hierzu nehmen wir an, daß der Wind in der Richtung der Drehaxe des Windrades mit der Geschwindigkeit $= V$ bläßt und ein beliebiges Element wie AB Fig. 216, welches in der Entfernung $= x$ von der Drehaxe liegt, eine Geschwindigkeit $v = x\omega$ rechtwinklig gegen V besitzt, wobei ω die constante Winkelgeschwindigkeit der Bewegung bezeichnet. Bildet ferner V mit AB den Winkel φ und bezeichnet dF den Flächeninhalt des Elementes AB, so ergiebt sich ohne Weiteres das Differenzial dL der vom Winde auf den Flügel übergetragenen mechanischen Arbeit:

*) Theoretisch-practisches Handbuch über Dampfwagen. 2. Aufl., ins Deutsche von Dr. Schnuse übersetzt. S. 81.

**) Resultate für den Maschinenbau. Dritte Auflage. S. 256.

$$(1)\quad dL = \frac{k\gamma_1}{2g} \,.\, dF\,(V \sin\alpha - \omega x \,.\, \cos\alpha)^2\, \omega x \,.\, \cos\alpha.$$

Bezeichnet r_1 die von der Drehaxe am weitesten abstehende Sprosse, r_0 diejenige, welche sich derselben Axe am nächsten befindet und nimmt man an, daß α und F als Funktionen von x auszudrücken, auch überhaupt n Flügel vorhanden sind, so erhält man:

$$L = n\frac{k\gamma_1}{2g}\omega \int_{r_0}^{r} dF\,(V \sin\alpha - \omega x \cos\alpha)^2\, x \cos\alpha.$$

Da es jedoch zu einfacheren Entwickelungen führt, sobald man x und F als Funktionen von α darstellt, so erhält man, sobald sich α_1 und α_0 auf die Sprossen in den Entfernungen r_1 und r_0 von der Drehaxe beziehen:

$$(2)\quad L = n\,.\,\frac{k\gamma_1\omega}{2g}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dF\,(V \sin\alpha - \omega x \cos\alpha)^2\, x \cos\alpha. \;{}^{*})$$

Bildet jeder der n Flügel ein Rechteck von der constanten Breite $= b$, so wird $dF = b dx$ und man erhält aus (2) nach einiger Umformung:

$$(3)\quad L = n\frac{k\gamma_1\omega b}{2g}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (V\, tg\,\alpha - x\omega)^2\, x dx \cos\alpha^3.$$

Um letzteren Ausdruck in bereits gedachter Weise integrirbar zu machen, nehme man zuerst x und F als constant an und suche denjenigen Werth von α, für welchen $f(\alpha) = (V \sin\alpha - x\omega\cos\alpha)^2 \cos\alpha$ ein Maximum wird.

Nach bekannter Methode erhält man dann leicht:

$$(4)\quad tg\,\alpha^2 - 3\frac{x\omega}{V}\,.\,tg\,\alpha = 2 \text{ und}$$

$$(5)\quad tg\,\alpha = \tfrac{3}{2}\frac{\omega x}{V} + \sqrt{2 + \left(\tfrac{3}{2}\frac{\omega x}{V}\right)^2} \;{}^{**})$$

---

*) Für die verlorene Arbeit, welche der Zapfenreibung in der Axenrichtung der Windradwelle entspricht, erhält man ebenso, wenn f den betreffenden Reibungscoefficient bezeichnet:

$$L = \frac{nk\gamma_1}{2g}\,.\,\tfrac{2}{3} f\varrho\omega\,.\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dF\,(V\sin\alpha - \omega x\cos\alpha)^2\,\omega x \sin\alpha.$$

**) Nach Coulomb's Versuchen ist für $r_0 = 2^m$ der Werth von $\alpha_0 = 60^0$ und für $r_2 = 12^m$, $\alpha_1 = 81^0$ (Mittelwerth). Setzt man in (4) $\omega = 0{,}7$ und $V = 4^m{,}05$, welche Werthe dem gedachten Coulomb'schen Versuche entsprechen, so ergiebt sich

$$\alpha_0 = 63^0\,42'$$
$$\alpha_1 = 81^0\,17'$$

d. h. eine verhältnißmäßig gute Uebereinstimmung.

Aus (4) folgt ferner:

$$\frac{V}{3}.\,tg\,\alpha - x\omega = \tfrac{2}{3}\,V.\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

und wenn man zu letzterem Werthe auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{2}{3}\,V\,tg\,\alpha$ addirt, wird:

$$V.\,tg\,\alpha - x\omega = \tfrac{2}{3}\,V\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \tfrac{2}{3}\,V\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{2}{3}.\,\frac{V}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Sonach erhält man aus (3)

$$(6)\quad L = \tfrac{2}{9}\,\frac{kn\gamma_1 b V^2\omega}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{x\,dx\,.\,\cos\alpha}{\sin\alpha^2}.$$

Um jetzt x durch α auszudrücken reducire man zunächst aus (4):

$$x = \frac{V}{3\omega}\left(tg\,\alpha - \frac{2}{tg\,\alpha}\right) = \frac{V}{3\omega}\left(\frac{\sin\alpha^2 - 2\cos\alpha^2}{\sin\alpha\cos\alpha}\right),$$

Durch Differenziation des ersten Werthes folgt:

$$dx = \frac{V}{3\omega}\,d\alpha\left(\frac{\sin\alpha^2 + 2\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2\sin\alpha^2}\right),$$

so wie ferner:

$$x\,dx = \frac{V^2}{9\omega^2}\left(\frac{\sin\alpha^4 - 4\cos\alpha^4}{\cos\alpha^3\sin\alpha^3}\right).d\alpha.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung folgt endlich aus (6), wenn gleichzeitig mit Coriolis $k = 3$ gesetzt wird:

$$L = \tfrac{2}{27}\,\frac{n\gamma_1 b V^4}{g\omega}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha\,\frac{\sin\alpha^4 - 4\cos\alpha^4}{\cos\alpha^2\sin\alpha^5}\ \text{oder:}$$

$$L = \tfrac{2}{27}\,n\gamma_1\,\frac{bV^4}{g\omega}\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha^2} - 4\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{d\alpha\cos\alpha^2}{\sin\alpha^5}\right].$$

Nach gehöriger Ausführung der Integrationen findet sich *):

---

*) Zur Integration wurden folgende Formeln benutzt (Franke: Lehrbuch der höheren Mathematik, S. 252 etc.):

$$\int\frac{dx}{\sin x^m\cos x^n} = \frac{1}{(n-1)\sin x^{m-1}\cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin x^m\cos x^{n-2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x^2} = \frac{1}{\cos x} + \int\frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} + lgnt.\,tg\,\tfrac{1}{2}\,x$$

$$\int\frac{\cos x^n\,dx}{\sin x^m} = -\frac{\cos x^{n+1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1}\int\frac{dx\,.\cos x^n}{\sin x^{m-2}}$$

$$\int\sin x^m\cos x^n\,dx = \frac{\sin x^{m+1}\cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int dx\sin x^m\cos x^{n-2}$$

$$L = \frac{2}{27}\,\frac{n\gamma_1 b V^4}{g\omega}\left\{\frac{\cos\alpha^3 + \cos\alpha}{2\sin\alpha^4} + \frac{1}{\cos\alpha} + \tfrac{3}{2}\,lgnt\,lg\,\tfrac{1}{2}\alpha\right\} + C,$$

oder weil $\dfrac{\cos\alpha^3 + \cos\alpha}{2\sin\alpha^4} + \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha^4 + \cos\alpha^4 + \cos\alpha^2}{2\sin\alpha^4\cos\alpha} =$

$$= \frac{1}{\sin\alpha^4\cos\alpha} - \tfrac{3}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha^2} \text{ ist:}$$

$$\text{I.}\quad L = \tfrac{2}{27}\,.\,\frac{n\gamma_1 b V^4}{g\omega}\left\{\frac{1}{\sin\alpha^4\cos\alpha} - \tfrac{3}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha^2} + \tfrac{3}{2}\,lgnt\,(lg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha)\right\} + C.$$

Letzterer Werth, zuerst von Coriolis abgeleitet *), läßt sich mit Beachtung der Grenzen und für $n = 4$ auch darstellen durch:

$$\text{II.}\quad L = \tfrac{24}{81}\,\frac{\gamma_1 b V^4}{g\omega}\,[\psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_0)].$$

Anmerkung 1. Um zu zeigen, wie weit die Gleichung II. mit den Versuchen Coulombs übereinstimmt, hat Coriolis **) eine Tabelle berechnet, der wir nachstehende Zusammenstellung entlehnen:

Windgeschwindigkeit $= V$	Winkelgeschwindigkeit $= \omega$ in 1 Meter Entfernung von der Drehaxe	α_0 in 2^m Entfernung von der Drehaxe (Gradmaß)	α_1 in 12^m Entfernung von der Drehaxe (Gradmaß)	Arbeit in Dynamoden, d. i. 1000 Kilogr. pr. Sec. auf 1 Meter Höhe erhoben: nach der Formel (ohne Reibungswiderstände)	Arbeit in Dynamoden, d. i. 1000 Kilogr. pr. Sec. auf 1 Meter Höhe erhoben: nach der Beobachtung
$2^m,27$	0,18	59° 3′	73° 40′	0,0121	?
$4^m,05$	0,70	63° 42′	81° 17′	0,1094	0,1480
$6^m,50$	1,80	67° 58′	84° 22′	0,5346	0,6309

Anmerkung 2. Navier ***) entwickelt, um, wie er sagt, eine Idee der betreffenden Theorie zu geben, unter Voraussetzung eines constanten Neigungswinkels φ für alle Sprossen, die Größe der vom

---

und damit erhalten: $\displaystyle\int\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha^2} = \frac{1}{\cos\alpha} + lgnt\,.\,lg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha$, so wie

$$\int\frac{\cos\alpha^3\,d\alpha}{\sin\alpha^5} = -\frac{\cos\alpha^3}{4\sin\alpha^4} - \tfrac{1}{8}\,\frac{\cos\alpha^3}{\sin\alpha^2} - \tfrac{1}{8}\cos\alpha - \tfrac{1}{8}\,lgnt\,(lg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha) =$$

$$-\frac{\cos\alpha^3 + \cos\alpha}{8\sin\alpha^4} - \tfrac{1}{8}\,lgnt\,(lg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha).$$

*) Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines, seconde édition, pag. 307. Noch allgemeiner für trapezförmige Flügel hat Weisbach diesen Gegenstand behandelt in seiner „Bergmaschinenmechanik", Seite 185.

**) a. a. O. p. 308.

***) Résumé des leçons, IIIe Partie, Nr. 140.

Winde, auf das Rad von A Gesammtfläche der Flügel, übergetragenen mechanischen Wirkung $= L$ zu:

$$L = \frac{k\gamma_1 A}{2g}(V \sin\varphi - v\cos\varphi)^2 v \cos\varphi,$$

wobei v die Geschwindigkeit des Flügelmittelpunktes bezeichnen soll.

Für $v = \frac{1}{3} V tg\, \varphi$ wird L zu einem Maximum $= L_1$ und daher

$$L_1 = \tfrac{4}{27} \,.\, k\gamma_1 A \frac{V^3}{2g} \,.\, \sin\varphi^3.$$

Statt letzterem Werthe kann man auch setzen:

$$L_1 = m \,.\, AV^3,$$

wo m einen aus Versuchen zu ermittelnden Conficienten bezeichnet.

Leider kennt man für letzteren Zweck nur einen einzigen von d'Aubuisson *) angeführten Versuch Coulombs, aus welchem sich Nachstehendes entnehmen läßt.

Bei einer gut construirten holländischen Windmühle (in der Umgebung der Stadt Lille), welche sechs Stampfen für Oelsamen bewegte, fand Coulomb die Windgeschwindigkeit $V = 6^m,5$, während jene sechs Stampfen zusammen ein Gewicht von 2741 Kilogramme hatten, die Hubhöhe jeder Stampfe 0,4872 betrug und pr. Minute 26 Hübe erfolgten.

Hiernach ergab sich pr. Sec. als Nutzarbeit: $\frac{2741.0,4872.26}{60} = 578^{mk},6$

Ferner betrug die gleichzeitige Nebenarbeit:

wegen Reibungen	49,0
wegen Stößen zwischen Daumen und Heblatten . .	43,7
	671,3

Da nun überhaupt an Gesammt-Flügelfläche $= A$ vorhanden war $A = 81,12$ Quadratmeter, so hatte man zur Bestimmung von m:

$$671,3 = m \,.\, 81,12\,(6,5)^3, \text{ woraus sich}$$

$$m = 0,0302 \text{ berechnet}$$

und daher wird:

$$L_1 = 0,0302 \,.\, A \,.\, V^3 \text{ Meter-Kilogramme.}$$

Anmerkung 3. Anemometer. Zur Ermittelung der Geschwindigkeit bewegter elastischer Flüssigkeiten (vorzugsweise der bewegten atmosphärischen Luft oder des Windes) benutzt man Instrumente, die man Anemometer **) nennt und wovon das zur Zeit fast allein brauchbare der Woltmann'sche Flügel (§. 115) ist, den man für diesen Zweck nur zarter baut und den betreffenden Zählapparat für eine größere Menge von Umdrehungen anordnet.

*) Traité d'hydraulique, p. 625.

**) ανεμος, der Wind.

Ausführliches über Anemometer findet man in den unten bemerkten Quellen *).

[§. 182.]

Freier Fall der Körper, mit Beachtung des Widerstandes der atmosphärischen Luft.

Bezeichnet a eine constante Größe, deren Werth je nach der Größe, der Gestalt des fallenden festen Körpers und nach dem Verhältnisse seiner Dichte zu der der Luft verschieden ist, v die Geschwindigkeit nach einer beliebigen Zeit t, welche der Körper durch das Fallen erlangt hat, so erhält man, sobald g die Acceleration der Schwerkraft bezeichnet:

$$\frac{dv}{dt} = g - av^2$$

und hieraus:

$$\text{I.} \quad t = \frac{1}{2r}\, lgnt\, \frac{1+mv}{1-mv},$$

worin $m = \sqrt{\frac{a}{g}}$ und $r = \sqrt{ag}$ ist.

Aus I. reducirt man leicht:

$$\text{II.} \quad v = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{2rt}-1}{e^{2rt}+1},$$

wobei $e = 2{,}71828\ldots$

Endlich erhält man für den nach t Zeit zurückgelegten Weg $= x$, wegen

$$dx = v dt:$$

$$dx = \frac{1}{m}\, \frac{e^{2rt}-1}{e^{2rt}+1} \cdot dt \text{**}), \text{ d. i.}$$

$$\text{III.} \quad x = \frac{1}{a}\, lgnt\, \frac{e^{2rt}+1}{2e^{rt}}.$$

---

*) Allgemeine Maschinenencyklopädie, Artikel „Anemometer“, und Annales des mines 1838, Tome XIII, p. 103 (eine höchst werthvolle Arbeit von Combes).
Tomlinson: Pneumatics, London 1852, p. 119.
Morin: Expériences sur la ventilation etc. Comptes Rendus, T. XXXIV, p. 615; Polytechn. Centralblatt 1853, Seite 77 und Dingler polytechn. Journal. Band 126, Seite 396.

**) $e^{2rt} - 1 = u$, also $e^{2rt} + 1 = u + 2$ gesetzt, liefert:

$$dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{u}{u+2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{du}{1+u}, \text{ d. i.}$$

Beispiel.*) Eine Kugel von $0^m,03$ Durchmesser und 0,0113 Kilogramm Gewicht läßt man in ruhiger Luft bei 12° *C* Temperatur und $0^m,75$ Barometerstand fallen. Es fragt sich, welchen Weg dieselbe nach $2\frac{1}{2}$ Secunden durchfallen und welche Geschwindigkeit sie erreicht haben wird, sobald man sie vom Zustande der Ruhe aus fallen läßt.

Auflösung. Für die widerstehende Acceleration (Verzögerung) der Bewegung $= G$ erhält man zunächst:

$$G = \frac{\text{Widerstand}}{\text{Masse des fallenden Körpers}} = g \cdot \frac{k\gamma_1 A \frac{v^2}{2g}}{Q}.$$

Da nun $\gamma_1 = 1,293 \cdot \frac{75}{76} \cdot \frac{1}{1,044} = 1,222$, ferner $A = \frac{\pi}{4}(0,03)^2 = 0,0007068$, $\frac{1}{2g} = \frac{1}{2.9,8088}$ und, nach S. 463, $k = 0,52$ ist, so berechnet sich:

$$G = g \cdot \frac{0,00002298.v^2}{Q} = g \cdot \frac{0,00002298.v^2}{0,0113}$$

$$= 9,8088 . \frac{0,00002298.v^2}{0,0113} = 0,01995 . v^2.$$

Daher ist

$$a = 0,01995,\ r = \sqrt{ag} = 0,44233,\ m = \sqrt{\frac{a}{g}} = 0,0451,\ e^{rt} = 3,0217,$$

und somit der durchgefallene Weg:

$$x = \frac{1}{0,01995} \cdot lgnt \frac{1 + (3,0217)^2}{2.3,0217} = 25^m,6.$$

Für die erlangte Geschwindigkeit nach derselben Zeit folgt nach II.:

$$v = \frac{1}{0,0451} \frac{9,1307 - 1}{10,1307}, \text{ d. i.}$$

$$v = 17^m,8.$$

$$2ax = 2\int \frac{du}{u+2} - \int \frac{du}{1+u} + C, \text{ woraus sich ergiebt:}$$

$$2ax = 2\, lgnt\, (e^{2rt} + 1) - 2\, lgnt . e^{rt} - 2\, lgnt\, 2, \text{ oder}$$

$$x = \frac{1}{a}\, lgnt \frac{\frac{1}{2}(e^{2rt} + 1)}{e^{rt}}.$$

*) Andere werthvolle Aufgaben z. B. Rechnungen zur Beurtheilung der von Newton in der Londoner Paulskirche mit Glaskugeln angestellten Fallversuche finden sich bei Duchemin: „Experimentaluntersuchungen“ Nr. 113. Ferner, ebendaselbst, über den „Widerstand, welchen ein in der Luft oder im Wasser schwingendes Pendel erfährt“. Nr. 126.

[§. 183.]

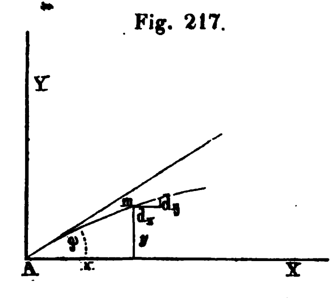
Widerstand der Luft bei schief gegen den Horizont geworfenen Kugeln.

Um, der Vollständigkeit wegen, einen eben so interessanten wie schwierigen Gegenstand, nicht ganz unberücksichtigt zu lassen, behandeln wir hier die in der Ueberschrift bezeichnete Frage für den allereinfachsten Fall, d. h. unter der Voraussetzung, daß auch bei Körpern, welche sich mit großer Geschwindigkeit in der atmosphärischen Luft bewegen, der von letzterer verursachte Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist *).

Es bezeichne hierzu G die widerstehende Acceleration, welche die Luft einer Geschützkugel entgegensetzt, φ den Elevationswinkel Fig. 217 und x, y die Coordinaten desjenigen Punktes m der Trajektorie in welchem sich die geworfene Kugel am Ende einer Zeit t befindet.

Ferner sei s der Bogen Am den der Schwerpunkt der Kugel am Ende der Zeit t beschrieben hat, so wie $v = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung im Punkte m der Bahn. Von der gleichzeitigen Umdrehung der Kugel wird abgesehen**), wonach angenommen werden kann, daß die Bewegung in einer Vertikalebene erfolgt, die durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit $= V$ gelegt ist. Hiernach folgt: $G = nv^2$, wo n einen aus der untenstehenden Note***) zu entnehmenden constanten Werth bezeichnet.

Fig. 217.



*) Otto (Hülfsmittel für ballistische Rechnungen. Berlin 1855) hat neuerdings den verschiedenen Ausdrücken zur Darstellung des Luftwiderstandes bei Geschützkugeln, eine ganz besondere Betrachtung gewidmet, aus welcher im Allgemeinen folgt, daß es für die meisten praktischen Fälle ziemlich gleichgültig ist, welches der verschiedenen Luftwiderstandsgesetze man wählt.

**) Wie man die (in der Wirklichkeit stets vorhandene) Umdrehbewegung der Kugel in Rechnung zieht zeigt u. A. recht einfach Otto a. a. O. S. 227.

***) Bezeichnet d den Durchmesser der Kugel und q das Gewicht der Cubikeinheit derselben, so ist

$$G = \frac{\text{Widerstand}}{\text{Masse}} = \frac{k'\gamma_1 \frac{d^2\pi}{4} \frac{v^2}{2g}}{\frac{1}{6} q \frac{d^3\pi}{g}} = \frac{3}{4} \frac{k'\gamma_1}{qd} \cdot v^2 = nv^2,$$

wobei k' einen Coefficienten bezeichnet, der aus folgender Tabelle entnommen werden kann, die Poncelet (Introduction etc. Nr. 428) aus Versuchen von Robins und Hutton berechnete:

Für die Acceleration beziehungsweise paralell der Axen UX und UY (wovon letztere in der Richtung der Schwerkraft liegen mag) Fig. 217 ergiebt sich aber:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G \cos \alpha \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -g - G \sin \alpha,$$

wo α der Winkel ist, welcher die Tangente am Punkte m mit dem Horizonte einschließt.

Führt man in letztere beiden Gleichungen $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ ein, so folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -nv^2 \frac{dx}{ds}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - nv^2 \frac{dy}{ds}, \text{ oder}$$

$$(1) \; \frac{d^2x}{dt^2} = -n\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 . \frac{dx}{ds}; \quad (2) \; \frac{d^2y}{dt^2} = -g - n\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{ds}.$$

Zuerst werde (1) integrirt und diese Gleichung zu diesem Ende geschrieben (t als unabhängige Varable vorausgesetzt):

$$\frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -n . ds,$$

woraus erhalten wird:

$$lgnt\left(\frac{dx}{dt}\right) = \text{Const.} - n . s.$$

Setzt man Const. $= lgnt\, B$, wobei B ebenfalls eine constante Größe bezeichnet, und multiplicirt ferner auf beiden Seiten der Gleichung mit $lgnt . e = 1$, so findet sich:

$$lgnt\left(\frac{dx}{dt}\right) = lgnt \frac{B}{e^{ns}}, \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = B . e^{-n.s}.$$

---

v	1m	3m	5m	10m	25m	50m	100m	200m	300m	400m	500m	600m
k'	0,59	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,77	0,88	0,99	1,04	1,01

hiernach ergiebt sich z. B. der Widerstand $= W$ einer mit 400 Meter Anfangsgeschwindigkeit abgeschossenen eisernen Kugel von 12,01 Kilogramme Gewicht (24 Pfünder); deren Durchmesser $0^m,1485$ (= 6,089 Zoll Hannov.) beträgt, da für diesen Fall $k' = 1$, $\gamma_1 = 1,3$ gesetzt werden kann, zu:

$$W = \gamma_1 \frac{d^2\pi}{4} . \frac{v^2}{2g} = 1,3.(0,1485).0,785.0,021.(400)^2 = 177 \text{ Kilogr.}$$

B findet sich wenn man beachtet, daß für $s =$ Null, die horizontale Geschwindigkeitscomposante $V . \cos\varphi$, d. h.

$$V . \cos\varphi = B . e^0 \text{ ist.}$$

Daher statt (3), die veränderliche Fortschreitungsgeschwindigkeit $= v$:

$$\text{I.} \quad v = \frac{dx}{dt} = V . \cos\varphi . e^{-ns}. \text{*)}$$

[§. 184.]

Die Differenzial-Gleichung der Geschoßbahn (Trajectorie) läßt sich jetzt mit Hülfe des Vorstehenden leicht entwickeln.

Aus (1) folgt:

$$n.ds = -\frac{d^2x}{dx}$$

und ebenso aus (2):

$$d^2y = -gdt^2 - n.ds.dy,$$

daher aus der Verbindung letzterer beiden Werthe:

$$d^2y = -gdt^2 + \frac{d^2x}{dx}.dy, \text{ oder}$$

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx} = -gdt^2, \text{ d. i.}$$

$$dx . d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -gdt^2,$$

oder auch, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird:

$$(4) \quad dx . dp = -gdt^2.$$

Nun folgt aber aus I. des vorigen Paragraphen: $dt = \frac{dx . e^{ns}}{V . \cos\varphi}$, daher aus (4):

$$dx . dp = -g\frac{dx^2\,e^{2ns}}{V^2 \cos\varphi^2}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{V^2 \cos\varphi^2}.e^{2ns}.$$

Oder wenn hier endlich die zur Anfangsgeschwindigkeit V gehörige Höhe $= H$ eingeführt, also $V^2 = 2gH$ gesetzt wird:

$$\text{II.} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2H\cos\varphi^2}.e^{2ns},$$

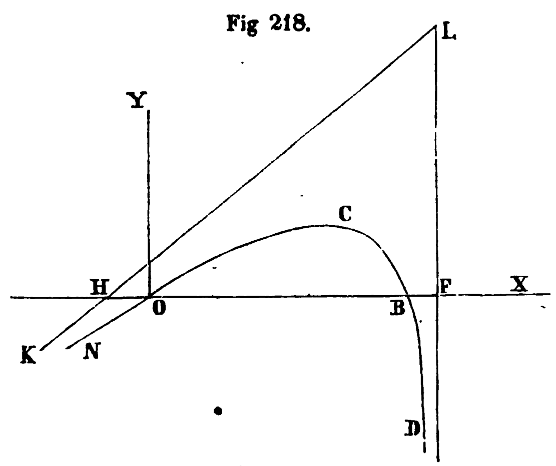
eine Gleichung, deren Integration unter endlicher Form nicht möglich ist.

---

*) Um hiernach Zahlenbeispiele zu berechnen, ist für Anfänger besonders zu empfehlen: Timmerhans: Essai d'un Traité d'Artillerie, Liége 1842, p. 124 etc.

Anmerkung. Hinsichtlich der Integration von II. muß verwiesen werden auf Poisson (Mechanik Bd. 1, §. 212 etc.), insbesondere aber auf Didion (Traité de Ballistique p. 62), welcher letzterer Schriftsteller zugleich (p. 147) die reichhaltigste Literatur des ganzen Gegenstandes (der Ballistik) liefert und ganz besonders die verschiedenen Annäherungsmethoden zur Behandlung der beiden Fundamentalgleichungen (als Methode der Quadraturen und die Methode Euler's §. 111, Methode der Reihenentwickelungen von Lambert §. 118, Borda §. 122, Tempelhof §. 123 und Français §. 124 und endlich Annäherungsverfahren von Borda (§. 134), Besout (§. 135) und Legendre, ausführlich erörtert.

Fig 218.



Poisson zeigt übrigens noch (a. a. O. §. 214), daß im Allgemeinen sowohl der aufsteigende Ast *NOC* der Bahn Fig. 218, als der absteigende *CBD* zur Gattung der Hyperbeln gehört, deren Asymptoten *KL* und *LF* sich in einem Punkte *L* schneiden und wovon die eine *KL* (des nach unten verlängerten aufsteigenden Astes) gegen den Horizont geneigt ist, die andere *LF* (des absteigenden Astes) auf denselben rechtwinklig steht oder vertikal ist. Ganz dasselbe zeigt Hutton durch Raisonnements (A Cours of Mathematics. Vol. III. p. 318, London 1827, 4. Edition).

[§. 185.]

Unter Voraussetzung so kleiner Elevationswinkel (unter 10 Grad), daß man die Horizontalprojektionen der Bahnen statt der wirklich durchlaufenen Bögen in Rechnung bringen darf, gestalten sich die vorstehenden Entwickelungen außerordentlich einfach.

Zunächst folgt aus II. des vorigen Paragraphen:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{2nx}}{2H\cos\varphi^2},$$

wovon das Integral ist:

$$p = -\frac{e^{2nx}}{4nH\cos\varphi^2} + \text{Const., oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{2nx}}{4nH\cos\varphi^2} + \text{Const.}$$

Für $x =$ Null wird aber $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$, daher:

$$dy = dx\,.\,tg\,\varphi + \frac{(1 - e^{2nx})\,dx}{4nH\cos\varphi^2}.$$

Aus der Integration dieser Gleichung ergiebt sich:

$$y = x\,.\,tg\,\varphi + \frac{x}{4nH\cos\varphi^2} - \frac{e^{2nx}}{8n^2H\cos\varphi^2} + \text{Const.}$$

Da für $x =$ Null auch $y =$ Null wird, so ist

$$\text{Const.} = \frac{1}{8n^2H\cos\varphi^2},$$

daher das bestimmte Integral:

$$\text{III.}\quad y = x\left(tg\,\varphi + \frac{1}{4nH\cos\varphi^2}\right) - \frac{(e^{2nx} - 1)}{8n^2H\cos\varphi^2}.$$

Schreibt man hier z statt $2nx$, setzt $n = \frac{1}{2\varkappa}$, nimmt φ so klein, daß man den Cosinus mit der Einheit verwechseln kann und führt wieder $V^2 = 2gH$ ein, so erhält man:

$$\text{III}^a.\quad y = x\,tg\,\varphi - \frac{g\varkappa^2}{V^2}(e_z - 1 - z),$$

eine Gleichung, welche Otto (Hülfsmittel zu ballistischen Rechnungen, 1. Lieferung, S. 24 und S. 41 etc.) zu vergleichenden Berechnungen mit gemachten Beobachtungen verwendet und worauf hier, zum Weiterstudium aufmerksam gemacht werden mag.

Endlich folgt noch aus (I) [§. 183]

$$dt = \frac{e^{nx}\,.\,dx}{V\cos\varphi},$$

woraus sich ohne Weiteres ergiebt:

$$\text{IV.}\quad t = \frac{1}{n\,.\,V\cos\varphi}(e^{nx} - 1).$$

Für $y =$ Null folgt noch aus III:

$$\text{V.}\quad \sin 2\varphi = \frac{e^{2nx} - 2nx - 1}{4n^2Hx},$$

ein Ausdruck mittelst welchen die Anfangsgeschwindigkeit $V = \sqrt{2gH}$ und die größte Entfernung (Wurfweite) $= x$ zu berechnen ist, die bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit und gegebenem Elevationswinkel eine bestimmte Kugel erreichen kann.

Für die Abscisse x_1, welche der größten Ordinate der Trajectorie entspricht, findet sich noch aus III., indem man $\frac{dy}{dx} = 0$ entwickelt:

$$\text{VI.} \quad x_1 = \frac{lgnt(1 + 2nH \cdot \sin 2\varphi)}{2n\, lgnt \cdot e}.$$

Beispiel. Zu welcher Höhe hatte sich eine 12 Pfünder Kugel von $0^m,1161$ Durchmesser erhoben, welche bei 1 Grad Elevationswinkel und 543 Meter Anfangsgeschwindigkeit in einer Entfernung von 605 Meter wieder den Horizont erreichte?

Auflösung. Für $\gamma_1 = 1,2291$ und $q = 7000$, $k' = 1,032$ und $d = 0,1161$, folgt $n = 0,00116$ und sodann aus III.: $y = 4^m,35$, während (nach Timmerhans, Essai d'un Traité d'Artillerie p. 336) die Beobachtung $y = 4^m,24$ lieferte. (Mehrere ähnliche Beispiele finden sich ebenfalls bei Timmerhans.)

Anmerkung. Außer den bereits mehrfach citirten Werken und Abhandlungen über Ballistik, kann den Studirenden noch besonders empfohlen werden:

J. Hartmann, (Capitain der K. hannov. Artillerie): Vorträge über Artillerie. Einleitung in die Ballistik. Hannover 1856. (Ein mit Fleiß und Sachkenntniß bearbeitetes Werkchen, was Anfängern nicht genug empfohlen werden kann).

F. Otto, (K. Preuß. Artillerie-Major): Ueber den Luftwiderstand in der Ballistik und Kritik des Didion'schen (oben citirten) Werkes über Ballistik. Archiv für die Officiere der Königl. preußisch. Artillerie und des Ingenieurs-Corps, S. 75 Bd. 33 u. S. 105 Bd. 35.

Rouveroy, (Königl. sächs. Artillerie-General): Bemerkungen und Untersuchungen über einige Gegenstände der Ballistik. (Eine beachtenswerthe Arbeit). Zeitschrift für Mathematik und Physik (von Schlömilch u. Witschel). 1. Jahrg. (1856). S. 325.

Anhang.

Nr. 1. *Methode zu experimentellen Bestimmung des Schwerpunktes eines Schiffes.*

(Zu §. 38, Seite 82.)

Nachbemerkte Methode ist vom schwedischen Admiral Chapmann vorgeschlagen, und für alle Arten Schiffe zur Anwendung empfohlen.*) Es besteht dieselbe darin, daß man verschiedene Gewichte am Bord desjenigen Schiffes dessen Schwerpunkt ermittelt werden soll, in seitlicher Richtung fortbewegt, so daß das Schiff eine geneigte Stellung annimmt; das statische Moment der sämmtlichen so fortbewegten Gewichte wird nothwendig dem Stabilitätsmomente $= M$ gleich sein, für welches nach Seite 76 ist:

$$M = Q\left(\frac{v}{V} . b - d . \sin\varphi\right).$$

Bezeichnet ferner W die Gewichte, welche um a fortbewegt wurden, so erhält man für M auch $M = W . a . \cos\varphi$, woraus folgt:

$$W . a \cos\varphi = Q\left(\frac{v}{V} b - d . \sin\varphi\right), \text{ d. i.}$$

$$d = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{v}{V} . b - \frac{W}{Q} . a . \cos\varphi\right),$$

wobei d (die Entfernung des Schiffsschwerpunktes vom Deplacementsschwerpunkte) die einzige unbekannte, hiernach leicht zu bestimmende Größe ist.

Um die Anwendbarkeit dieser Methode zu zeigen, beschreiben wir folgenden Versuch.

Im Mai 1830 lag im Hafen von Portsmouth die Corvette Scylla der Königl. englischen Marine von 18 Kanonen unter dem Commando

*) Creuze: Treatise on the theorie and pratice of naval architecture, p. 31.

des Capitäns Heidmarsch, auf dessen Wunsch der Versuch von Mr. Morgan (von der School of naval architecture), dem Aufseher im Dock-Yard zu Portsmouth und dem Mr. Creuze ausgeführt wurde. Diese Einzelheiten werden erwähnt, weil es das erste, wenn nicht einzige Beispiel in England ist, die Schwerpunktsbestimmung eines Schiffes nach der Chapmann'schen Methode vorzunehmen.

Die Wassertiefe konnte des ruhigen Wassers wegen, sehr genau gemessen werden. Dieselbe fand sich vorn 11 Fuß 6 Zoll, hinten 14 Fuß $10\frac{1}{2}$ Zoll. Die Tiefe des Kiels und falschen Kiels, unter der unteren Ecke der Kielnuth*) fand man vorn 1 Fuß 9 Zoll, hinten 1 Fuß 3 Zoll. Das Schiff lag ursprünglich vollkommen aufrecht, alle Gewichte, die Mannschaft ausgeschlossen, waren gleichmäßig auf jeder Seite vertheilt. Ein großer Quadrant mit einer Gradscale, ein Loth im Mittelpunkte tragend, war in der Hauptluke befestigt um die Neigung zu messen. Die Stellung der Carronaden und der langen Kanone der einen Seite, waren auf dem Verdeck bemerkt, sie wurden dann auf die andere Seite gebracht, indem man sie genau in derselben Querlinie erhielt. Die Kugeln, Hängematten und die Mannschaft wurden unter denselben Bedingungen ebenfalls auf die geneigte Seite gestellt. Die Entfernung, durch welche man jedes Gewicht bewegt hatte, wurde hierauf sorgfältig gemessen. Das Gewicht der Kugeln war bekannt, dasjenige der langen Kanone und der Carronaden wurde so angenommen, wie es auf ihnen bemerkt stand. Das Gewicht der Menschen und Hängematten erhielt man durch Wägung; die Neigung wurde dann zu $6^{0}\ 20'$ beobachtet.

Nachdem die Werthe von W, v, V, b und Q berechnet und in obige Formel substituirt waren, ergab sich ($\varphi = 6^{0}\ 20'$ gesetzt):

$$d = 3{,}6 \text{ Fuß}.$$

Da die Entfernung zwischen dem Schwerpunkte des Deplacements und der Wasserlinie 3,97 Fuß betrug, so lag, zur Zeit des Experimentes, der Schiffsschwerpunkt 0,37 Fuß unter der Wasserlinie.

Nr. 2. *Wirkung der Wellen gegen Bauconstructionen.*

(Zu §. 170.)

Der englische Wasserbau-Ingenieur (und berühmte Erbauer von Leuchtthürmen) Thomas Stevenson**) hat mit Hülfe eines sinnreichen und einfachen Dynamometers (ähnlich wie Bouguer's Anemometer***) die Kraft der Meereswellen oder den hydraulischen Druck derselben gegen feste Fläche, durch sorgfältige und andauernde Versuche zu bestimmen gesucht.

---

*) In diese Nuth legen sich die unteren Enden der Beplankung.

**) Annales des Ponts et Chaussées. 1849, 2, pag. 305.

***) Traité du Navire. p. 359.

An der Ostküste Schottlands (Insel Skerryvore), wo die Heftigkeit der Wellen die gewöhnlichen Grenzen überschreitet, fand Stevenson den hydraulischen Druck pr. Quadratmeter (als Mittelwerthe):

3035 Kilogramme während der 5 Sommermonate 1843 und 1844,
10430 „ „ „ 6 Wintermonate „ „; „

Der größte beobachtete Druck war

30415 Kilogramm pr. □Meter,

der diesem nächst kommende: 26615 Kilogramm pr. □Meter. Der größte von Stevenson am Bell-Rock-Leuchthurme beobachtete Druck betrug: 16732 Kilogramm.

Wendet man zur Berechnung der Geschwindigkeit $= V$ womit der größte Stoß erfolgte unsere Formel §. 180, nämlich

$$P = 2{,}316 \, . \, \gamma \, . \, A^{1,1} \, . \, \frac{V^2}{2g} \text{ an,}$$

setzt also $P = 30415$, $A = 1$ und $g = 9{,}81$, so ergiebt sich:

$$V = \sqrt{\frac{30415 \, . \, 2 \, . \, 9{,}81}{2{,}316 \, . \, 1000}} = 16^m{,}05.$$

Nach Weber's Wellenlehre[1]) wurde vom Engländer Thomson die Geschwindigkeit der Meereswellen zu 29,49 engl. Meilen (à 1852^m) pr. Stunde, oder zu $15^m{,}17$ pr. Secunde beobachtet. Gaudry[2]) giebt die größten Geschwindigkeiten der Meereswellen zu 50 bis 60 Kilometer pr. Stunde an, was $13^m{,}88$ bis $16^m{,}66$ pr. Secunde ausmacht.

Beiläufig bemerkt wird die größte Höhe der Wellen, für den großen Ocean, von dem vertrauenswerthen Horner[3]) zu 25 bis 32 pariser Fuß, d. i. $8^m{,}125$ bis $10^m{,}40$ angegeben. Darcy[4]) berichtet von 15 Meter hohen Wellen. Weber[5]) sogar von solchen über 20 Meter Höhe. Letztere Angaben beziehen sich wahrscheinlich auf die Vereinigung mehrerer über einander geschobener Wellen, wobei die gewöhnlichen Höhen bei Weitem üerstiegen werden. In der Nordsee, zwischen Hull und Hamburg sind bis jetzt keine höhere Wellen als 12 Fuß beobachtet worden.

Die größte Tiefe bis zu welcher sich die von einer Welle veranlaßte Bewegung erstrecken kann, giebt Bermontier[6]) zu 80 Fuß und mehr an.

---

1) Seite 56. Auch Gehler's physikal. Wörterbuch. (Meer). Bd. 6, Seite 1743.
2) Traité des machines à vapeur. Seconde partie. Nr. 840, p. 448.
3) Gehler Wörterb. (Meer). Seite 1742.
4) a. a. O. p. 448.
5) a. a. O. Seite 45.
6) Gehler Wörterb. (Meer). a. a. O.